Theoremsy / Теоре́мзи

Математический анализ

Сходимость числовой последовательности по определению

задачи и решения

Автор:
Кулаго А. С., ММФ БГУ
andrejs.kulago@icloud.com

Обновлено:
14.06.2025

Ресурс:
https://theoremsy.com

2025, Минск

Теоретическая сводка

Числовой последовательностью называется всякая функция натурального аргумента

$$f:\ \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ n \to f(n), \tag{1}$$

и обозначается $a_n = f(n)$. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются **элементами числовой последовательности**.

Постоянной числовой последовательностью называется последовательность $a_n = c = \mathrm{const} \in \mathbb{R}$.

Числовая последовательность называется **ограниченной**, если выполнено

$$\exists C > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad |a_n| \le C. \tag{2}$$

Число $a \in \mathbb{R}$ называется **пределом числовой последовательности** $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge N_\varepsilon: \quad |a_n - a| < \varepsilon, \tag{3}$$

и обозначается

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \quad (a_n \to a,\ n \to \infty).$$

Если предел последовательности существует, то последовательность называется **сходящейся**, а в противном случае — **расходящейся**.

Если $a_n \to a,\ n \to \infty$ и $b_n \to b,\ n \to \infty$, то

$$1)\ \lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b,$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b,$$

$$3)\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad (b \ne 0,\ \forall n \in \mathbb{N}:\ b_n \ne 0).$$

Решение задач

Задача средняя (1)

Доказать по определению предела, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1.$$

Подсказка

Для всякого $\varepsilon > 0$ определите число $N_\varepsilon = N_\varepsilon(\varepsilon)$ такое, что $\forall n > N_\varepsilon : \left|\frac{n}{n+2} - 1\right| < \varepsilon$.

Решение:

Рассмотрим модуль разности числовой последовательности и предела

$$\left|\frac{n}{n+2} - 1\right| = \left|\frac{-2}{n+2}\right| = \frac{2}{n+2} < \varepsilon.$$

Откуда

$$\left|\frac{n}{n+2} - 1\right| < \varepsilon,$$

если выполнено

$$n > \frac{2}{\varepsilon} - 2.$$

Тогда в качестве искомого числа N_ε можно выбрать

$$N_\varepsilon = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right],$$

что по определению значит $\frac{n}{n+2} \to 1,\ n \to \infty$.