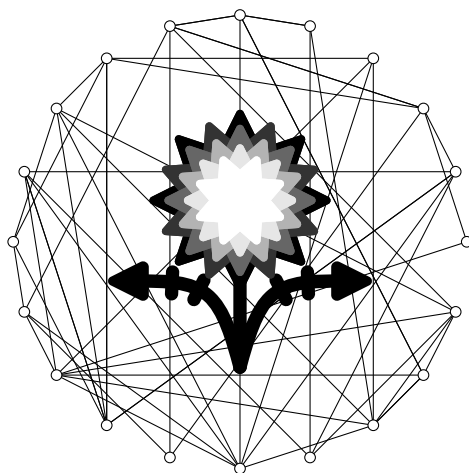




THEOREMSY / ТЕОРЕМЗИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Сходимость числовой последовательности по определению

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Автор:

Кулаго А. С., ММФ БГУ
andrejs.kulago@icloud.com

Обновлено:

14.06.2025

Ресурс:

<https://theoremsy.com>

2025, Минск

Теоретическая сводка

Числовой последовательностью называется всякая функция натурального аргумента

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, n \rightarrow f(n), \quad (1)$$

и обозначается $a_n = f(n)$. Числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ называются **элементами числовой последовательности**.

Постоянной числовой последовательностью называется последовательность $a_n = c = \text{const} \in \mathbb{R}$.

Числовая последовательность называется **ограниченной**, если выполнено

$$\exists C > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq C. \quad (2)$$

Число $a \in \mathbb{R}$ называется **пределом числовой последовательности** $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon, \quad (3)$$

и обозначается

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad (a_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty).$$

Если предел последовательности существует, то последовательность называется **сходящейся**, а в противном случае — **расходящейся**.

Если $a_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty$ и $b_n \rightarrow b, n \rightarrow \infty$, то

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b,$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b,$
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0, \forall n \in \mathbb{N} : b_n \neq 0).$

Решение задач

Задача средняя (1)



Доказать по определению предела, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} = 1.$$

Подсказка

Для всякого $\varepsilon > 0$ определите число $N_\varepsilon = N_\varepsilon(\varepsilon)$ такое, что $\forall n > N_\varepsilon : \left| \frac{n}{n+2} - 1 \right| < \varepsilon$.

Решение:

Рассмотрим модуль разности числовой последовательности и предела

$$\left| \frac{n}{n+2} - 1 \right| = \left| \frac{-2}{n+2} \right| = \frac{2}{n+2} < \varepsilon.$$

Откуда

$$\left| \frac{n}{n+2} - 1 \right| < \varepsilon,$$

если выполнено

$$n > \frac{2}{\varepsilon} - 2.$$

Тогда в качестве искомого числа N_ε можно выбрать

$$N_\varepsilon = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil,$$

что по определению значит $\frac{n}{n+2} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$.

Задача сложная (2)



Доказать, что последовательности $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ и $b_n = \frac{5 \sin(3n)}{n}$, являются бесконечно малыми, т. е. что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

Далее покажите, что любая последовательность $c_n = \frac{f(n)}{n}$, где c_n — ограниченная функция натурального аргумента (ограниченная последовательность), является бесконечно малой.

Подсказка

В доказательстве сходимости к нулю a_n (b_n) для всякого $\varepsilon > 0$ определите число $N_\varepsilon = N_\varepsilon(\varepsilon)$ такое, что

$$\forall n > N_\varepsilon : \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} - 0 \right| < \varepsilon \quad \left(\left| \frac{5 \sin(3n)}{n} - 0 \right| < \varepsilon \right).$$

При алгебраических преобразованиях воспользуйтесь оценками $|(-1)^{n+1}| = 1$ и $|5 \sin(3n)| < 5$. Для доказательства $c_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ проведите аналогичные рассуждения, используя неравенство из определения ограниченной последовательности (??).

Решение:

Начнём с последовательности a_n . Рассмотрим модуль разности общего члена последовательности и её предела

$$\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} - 0 \right| = \frac{|(-1)^{n+1}|}{|n|} = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

То есть достаточно взять

$$n > \frac{1}{\varepsilon},$$

чтобы выполнялось

$$|a_n - 0| < \varepsilon.$$

Тогда в качестве искомого числа N_ε^a можно выбрать

$$N_\varepsilon^a = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1,$$

откуда по определению следует $a_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Проведём аналогичные рассуждения для последовательности b_n , воспользовавшись известным фактом $\sin \alpha \leq 1$

$$\left| \frac{5 \sin(3n)}{n} - 0 \right| = 5 \frac{|\sin(3n)|}{|n|} \leq \frac{5}{n} < \varepsilon.$$

Откуда следует, что в качестве искомого номера можно взять $N_\varepsilon^b = \left\lceil \frac{5}{\varepsilon} \right\rceil + 1$.

Рассмотрим теперь обобщённый случай $c_n = \frac{f(n)}{n}$. Поскольку $f(n)$ — ограниченная функция, можно найти такое $C \in \mathbb{R}$, что выполняется $f(n) \leq C \forall n \in \mathbb{N}$. Пользуясь этим фактом, оценим разность

$$\left| \frac{f(n)}{n} - 0 \right| = \frac{|f(n)|}{n} \leq \frac{C}{n} \leq \varepsilon,$$

выбрав в качестве N_ε^c номер $\left[\frac{C}{\varepsilon} \right] + 1$. Итак, $c_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, что и требовалось доказать.