



---

THEOREMSY / ТЕОРЕМЗИ

---

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

---

# УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

---

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

**Автор:**

Кулаго А. С., ММФ БГУ  
[andrejs.kulago@icloud.com](mailto:andrejs.kulago@icloud.com)

**Обновлено:**

20.07.2025

**Ресурс:**

<https://theoremsy.com>

2025, Минск

## Теоретическая сводка

Пусть даны две числовые последовательности  $a_n$  и  $b_n$ :

1. если  $a_n$  и  $b_n$  сходятся, то последовательность  $c_n = a_n + b_n$  — сходится;
2. если  $a_n$  сходится, а  $b_n$  расходится, то  $c_n = a_n + b_n$  — расходится;
3. если  $a_n$  и  $b_n$  расходятся, то о сходимости  $c_n = a_n + b_n$  нельзя судить без дополнительных сведений о последовательностях  $a_n$  и  $b_n$ .

В выяснении сходимости последовательностей часто бывает удобной **теорема о зажатой последовательности** (теорема о двух милиционерах): *если начиная с некоторого номера выполняется  $a_n \leq b_n \leq c_n$  и*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a,$$

*то последовательность  $\{b_n\}$  также сходится к  $a$ .*

Числовая последовательность  $\{a_n\}$  называется **последовательностью Коши** (**фундаментальной последовательностью**), если справедливо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq N_\varepsilon : |a_n - a_m| < \varepsilon,$$

или в эквивалентной форме

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_\varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N} : |a_n - a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Справедлив следующий **критерий Коши** сходимости числовой последовательности: *последовательность  $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$  является сходящейся тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Последовательность  $\{a_n\}$  называется **возрастающей** (**убывающей**), если выполняется

$$a_{n+1} \geq a_n \quad (a_n \geq a_{n+1}), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Если неравенство является строгим, то говорят о **строго возрастающей** (**убывающей**) последовательности. (Строго) возрастающие и убывающие последовательности обобщенно называют **монотонными**.

Справедлив следующий **критерий сходимости монотонной последовательности**: *если последовательность  $a_n$  монотонно возрастает (убывает), начиная с некоторого номера, то она является сходящейся тогда и только тогда, когда она ограничена. Более того*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \{a_n\} \quad \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf \{a_n\} \right).$$

Пусть дана последовательность  $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ , а также последовательность натуральных чисел  $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ . Последовательность  $\{a_{n_k}\}$  называется **подпоследовательностью**  $\{a_n\}$ .

Если  $a_{n_k} \rightarrow a \in \mathbb{R}$ ,  $k \rightarrow \infty$ , то говорят, что  $a$  — **частичный предел**  $\{a_n\}$ . **Верхним (нижним) пределом** последовательности называется верхняя (нижняя) точная граница множества частичных пределов последовательности, она обозначается

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \quad (\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n).$$

В связи с введёнными определениями вводится следующий критерий сходимости: *для сходимости ограниченной последовательности  $\{a_n\}$  необходимо и достаточно, чтобы*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Отсюда, в частности, следует, что у сходящейся последовательности все частичные пределы совпадают.

## Решение задач

## Задача сложная (9)



Пользуясь критерием Коши, доказать, что последовательность

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

является расходящейся.

## Подсказка

Критерий Коши не выполняется, если

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \exists n_0 > N_\varepsilon \quad \exists p_0 > 0 : |a_{n_0+p_0} - a_{n_0}| \geq \varepsilon.$$

При оценке модуля разности  $n_0$ -го и  $(n_0 + p_0)$ -го членов последовательности примите  $p_0 = n_0$ .

## Решение:

Если для последовательности не выполняется критерий Коши, по определению это значит

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \exists n_0 > N_\varepsilon \quad \exists p_0 > 0 : |a_{n_0+p_0} - a_{n_0}| \geq \varepsilon.$$

Рассмотрим модуль разности  $n_0$ -го и  $(n_0 + p_0)$ -го членов последовательности и оценим его снизу

$$\begin{aligned} |a_{n_0+p_0} - a_{n_0}| &= \underbrace{\frac{1}{n_0+1} + \frac{1}{n_0+2} + \dots + \frac{1}{n_0+p_0}}_{p_0} > \\ &> p_0 \cdot \frac{1}{n_0+p_0} \Big|_{p_0=n_0} = \frac{1}{2} = \varepsilon_0. \end{aligned}$$

Таким образом, чтобы доказать, что критерий Коши не выполняется, достаточно взять  $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$  и  $p_0 = n_0 = N_\varepsilon + 1$ .

Для наглядности визуализируем расходямость рассматриваемой последовательности.

Sequence  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  disconvergence on graph