



THEOREMSY / ТЕОРЕМЗИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Автор:

Кулаго А. С., ММФ БГУ
andrejs.kulago@icloud.com

Обновлено:

20.07.2025

Ресурс:

<https://theoremsy.com>

2025, Минск

Теоретическая сводка

Пусть даны две числовые последовательности a_n и b_n :

1. если a_n и b_n сходятся, то последовательность $c_n = a_n + b_n$ — сходится;
2. если a_n сходится, а b_n расходится, то $c_n = a_n + b_n$ — расходится;
3. если a_n и b_n расходятся, то о сходимости $c_n = a_n + b_n$ нельзя судить без дополнительных сведений о последовательностях a_n и b_n .

В выяснении сходимости последовательностей часто бывает удобной **теорема о зажатой последовательности** (теорема о двух милиционерах): *если начиная с некоторого номера выполняется $a_n \leq b_n \leq c_n$ и*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a,$$

то последовательность $\{b_n\}$ также сходится к a .

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется **последовательностью Коши** (**фундаментальной последовательностью**), если справедливо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq N_\varepsilon : |a_n - a_m| < \varepsilon,$$

или в эквивалентной форме

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_\varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N} : |a_n - a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Справедлив следующий **критерий Коши** сходимости числовой последовательности: *последовательность $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ является сходящейся тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Последовательность $\{a_n\}$ называется **возрастающей** (**убывающей**), если выполняется

$$a_{n+1} \geq a_n \quad (a_n \geq a_{n+1}), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Если неравенство является строгим, то говорят о **строго возрастающей** (**убывающей**) последовательности. (Строго) возрастающие и убывающие последовательности обобщенно называют **монотонными**.

Справедлив следующий **критерий сходимости монотонной последовательности**: *если последовательность a_n монотонно возрастает (убывает), начиная с некоторого номера, то она является сходящейся тогда и только тогда, когда она ограничена. Более того*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \{a_n\} \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf \{a_n\} \right).$$

Пусть дана последовательность $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, а также последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$. Последовательность $\{a_{n_k}\}$ называется **подпоследовательностью** $\{a_n\}$.

Если $a_{n_k} \rightarrow a \in \mathbb{R}$, $k \rightarrow \infty$, то говорят, что a — **частичный предел** $\{a_n\}$. **Верхним (нижним) пределом** последовательности называется верхняя (нижняя) точная граница множества частичных пределов последовательности, она обозначается

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \quad (\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n).$$

В связи с введёнными определениями вводится следующий критерий сходимости: *для сходимости ограниченной последовательности $\{a_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Отсюда, в частности, следует, что у сходящейся последовательности все частичные пределы совпадают.

Решение задач

Задача средняя (6)



Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость последовательности

$$a_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\cos n!}{n \cdot (n+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{\cos k!}{k \cdot (k+1)}.$$

Подсказка

Для всякого $\varepsilon > 0$ определите число $N_\varepsilon = N_\varepsilon(\varepsilon)$ такое, что $\forall n > N_\varepsilon \forall p > 0$: $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$. При оценке модуля разности воспользуйтесь неравенством $|\cos x| \leq 1$, а также формулой

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Решение:

Оценим сверху модуль разности n -го и $(n+p)$ -го членов последовательности,

$$\begin{aligned} |a_{n+p} - a_n| &= \left| \sum_{k=1}^{n+p} \frac{\cos k!}{k \cdot (k+1)} - \sum_{k=1}^n \frac{\cos k!}{k \cdot (k+1)} \right| = \\ &= \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\cos k!}{k \cdot (k+1)} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{|\cos k!|}{k \cdot (k+1)} \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} = \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Здесь использовалась несложная формула

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Из полученной оценки следует, что в качестве N_ε можно взять $N_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$.