



THEOREMSY / ТЕОРЕМЗИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Автор:

Кулаго А. С., ММФ БГУ
andrejs.kulago@icloud.com

Обновлено:

20.07.2025

Ресурс:

<https://theoremsy.com>

2025, Минск

Теоретическая сводка

Пусть даны две числовые последовательности a_n и b_n :

1. если a_n и b_n сходятся, то последовательность $c_n = a_n + b_n$ — сходится;
2. если a_n сходится, а b_n расходится, то $c_n = a_n + b_n$ — расходится;
3. если a_n и b_n расходятся, то о сходимости $c_n = a_n + b_n$ нельзя судить без дополнительных сведений о последовательностях a_n и b_n .

В выяснении сходимости последовательностей часто бывает удобной **теорема о зажатой последовательности** (теорема о двух милиционерах): *если начиная с некоторого номера выполняется $a_n \leq b_n \leq c_n$ и*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a,$$

то последовательность $\{b_n\}$ также сходится к a .

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется **последовательностью Коши** (**фундаментальной последовательностью**), если справедливо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq N_\varepsilon : |a_n - a_m| < \varepsilon,$$

или в эквивалентной форме

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_\varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N} : |a_n - a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Справедлив следующий **критерий Коши** сходимости числовой последовательности: *последовательность $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ является сходящейся тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Последовательность $\{a_n\}$ называется **возрастающей** (**убывающей**), если выполняется

$$a_{n+1} \geq a_n \quad (a_n \geq a_{n+1}), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Если неравенство является строгим, то говорят о **строго возрастающей** (**убывающей**) последовательности. (Строго) возрастающие и убывающие последовательности обобщенно называют **монотонными**.

Справедлив следующий **критерий сходимости монотонной последовательности**: *если последовательность a_n монотонно возрастает (убывает), начиная с некоторого номера, то она является сходящейся тогда и только тогда, когда она ограничена. Более того*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \{a_n\} \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf \{a_n\} \right).$$

Пусть дана последовательность $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, а также последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$. Последовательность $\{a_{n_k}\}$ называется **подпоследовательностью** $\{a_n\}$.

Если $a_{n_k} \rightarrow a \in \mathbb{R}$, $k \rightarrow \infty$, то говорят, что a — **частичный предел** $\{a_n\}$. **Верхним (нижним) пределом** последовательности называется верхняя (нижняя) точная граница множества частичных пределов последовательности, она обозначается

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \quad (\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n).$$

В связи с введёнными определениями вводится следующий критерий сходимости: *для сходимости ограниченной последовательности $\{a_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Отсюда, в частности, следует, что у сходящейся последовательности все частичные пределы совпадают.

Решение задач

Задача средняя (5)



Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость последовательности

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k \cdot \arcsin \frac{1}{k}}{2^k}.$$

Подсказка

Для всякого $\varepsilon > 0$ определите число $N_\varepsilon = N_\varepsilon(\varepsilon)$ такое, что $\forall n > N_\varepsilon \forall p > 0$: $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$. При оценке модуля разности воспользуйтесь очевидным неравенством $|\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2}$, а также формулой для суммы первых n членов геометрической прогрессии.

Решение:

Оценим сверху модуль разности n -го и $(n+p)$ -го членов последовательности, пользуясь неравенством $|\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2}$ и формулой для суммы первых n членов геометрической прогрессии,

$$\begin{aligned} |a_{n+p} - a_n| &= \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{(-1)^k \cdot \arcsin \frac{1}{k}}{2^k} \right| = \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \left| \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k \cdot \arcsin \frac{1}{n+1+k}}{2^k} \right| \leq \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{|\arcsin \frac{1}{n+1+k}|}{2^k} \leq \\ &\leq \frac{\pi}{2^{n+2}} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{2^k} = \frac{\pi}{2^{n+2}} \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^p}{1 - \frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \frac{\pi}{2^n} < \varepsilon \implies \log_2 \frac{\pi}{\varepsilon} < n. \end{aligned}$$

Откуда следует, что в качестве N_ε достаточно взять $N_\varepsilon = \left[\log_2 \frac{\pi}{\varepsilon} \right] + 1$.