Theoremsy / Теоре́мзи

Математический анализ

Условия сходимости последовательностей

задачи и решения

Автор:
Кулаго А. С., ММФ БГУ
andrejs.kulago@icloud.com

Обновлено:
20.07.2025

Ресурс:
https://theoremsy.com

2025, Минск

Теоретическая сводка

Пусть даны две числовые последовательности a_n и b_n:

1. если a_n и b_n сходятся, то последовательность $c_n = a_n + b_n$ — сходится;
2. если a_n сходится, а b_n расходится, то $c_n = a_n + b_n$ — расходится;
3. если a_n и b_n расходятся, то о сходимости $c_n = a_n + b_n$ нельзя судить без дополнительных сведений о последовательностях a_n и b_n.

В выяснении сходимости последовательностей часто бывает удобной **теорема о зажатой последовательности** (теорема о двух милиционерах): *если начиная с некоторого номера выполняется $a_n \le b_n \le c_n$ и*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a,$$

то последовательность $\{b_n\}$ также сходится к a.

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется **последовательностью Коши (фундаментальной последовательностью)**, если справедливо

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \ge N_\varepsilon : \quad |a_n + a_m| < \varepsilon,$$

или в эквивалентной форме

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge N_\varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N} : \quad \left|a_n + a_{n+p}\right| < \varepsilon.$$

Справедлив следующий **критерий Коши** сходимости числовой последовательности: *последовательность $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ является сходящейся тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Последовательность $\{a_n\}$ называется **возрастающей (убывающей)**, если выполняется

$$a_{n+1} \ge a_n \;\; (a_n \ge a_{n+1}), \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Если неравенство является строгим, то говорят о **строго возрастающей (убывающей)** последовательности. (Строго) возрастающие и убывающие последовательности обобщенно называют **монотонными**.

Справедлив следующий **критерий сходимости монотонной последовательности**: *если последованность a_n монотонно возрастает (убывает), начиная с некоторого номера, то она является сходящейся тогда и только тогда, когда она ограничена. Более того*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\} \quad \left(\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}\right).$$

Пусть дана последовательность $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, а также последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$. Последовательность $\left\{a_{n_k}\right\}$ называется **подпоследовательностью** $\{a_n\}$.

Если $a_{n_k} \to a \in \mathbb{R},\ k \to \infty$, то говорят, что a — **частичный предел** $\{a_n\}$. **Верхним (нижним) пределом** последовательности называется верхняя (нижняя) точная граница множества частичных пределов последовательности, она обозначается

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \quad \left(\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n\right).$$

В связи с введёнными определениями вводится следующий критерий сходимости: *для сходимости ограниченной последовательности* $\{a_n\}$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n.$$

Отсюда, в частности, следует, что у сходящейся последовательности все частичные пределы совпадают.

Решение задач

Задача средняя (4)

Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость последовательности

$$a_n = b_0 + b_1 q + \ldots + b_n q^n = \sum_{k=0}^{n} b_k q^k,$$

где $|b_k| < M,\ k \in \mathbb{N}$ и $|q| < 1$.

Подсказка

Для всякого $\varepsilon > 0$ определите число $N_\varepsilon = N_\varepsilon(\varepsilon)$ такое, что $\forall n > N_\varepsilon\ \forall p > 0$: $\left|a_{n+p} - a_n\right| < \varepsilon$. При оценке модуля разности, пользуясь условием $|b_k| < M$, замените все множители b_k на M, а затем примените формулу для суммы первых n членов геометрической прогрессии.

Решение:

Рассмотрим модуль разности n-го и $(n+p)$-го членов последовательности

$$\left|a_{n+p} - a_n\right| = \left|\sum_{k=0}^{n+p} b_k q^k - \sum_{k=0}^{n} b_k q^k\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k q^k\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} |b_k| \cdot |q|^k < |q|^{n+1} M \cdot \sum_{k=0}^{p-1} |q|^k =$$

$$= |q|^{n+1} M \cdot \frac{|q|^p - 1}{|q| - 1} < \frac{M}{1 - |q|} \cdot |q|^{n+1} < \varepsilon.$$

Прологарифмируем последнее неравенство и выразим n

$$\frac{M}{1-|q|} \cdot |q|^{n+1} < \varepsilon$$

$$\ln \frac{M}{1-|q|} + (n+1) \ln |q| < \ln \varepsilon$$

$$(n+1) \cdot \ln |q| < \ln \varepsilon - \ln \frac{M}{1-|q|}$$

$$n > \ln \left(\frac{\varepsilon (1 - |q|)}{M} \right) \cdot \ln^{-1} |q| - 1.$$

Откуда следует, что в качестве N_ε достаточно взять $N_\varepsilon = \left[\ln \left(\frac{\varepsilon(1-|q|)}{M} \right) \cdot \ln^{-1} |q| \right]$