Theoremsy / Теорéмзи

Математический анализ

Условия сходимости последовательностей

задачи и решения

Автор:
Кулаго А. С., ММФ БГУ
andrejs.kulago@icloud.com

Обновлено:
20.07.2025

Ресурс:
https://theoremsy.com

2025, Минск

Теоретическая сводка

Пусть даны две числовые последовательности a_n и b_n:

1. если a_n и b_n сходятся, то последовательность $c_n = a_n + b_n$ — сходится;
2. если a_n сходится, а b_n расходится, то $c_n = a_n + b_n$ — расходится;
3. если a_n и b_n расходятся, то о сходимости $c_n = a_n + b_n$ нельзя судить без дополнительных сведений о последовательностях a_n и b_n.

В выяснении сходимости последовательностей часто бывает удобной **теорема о зажатой последовательности** (теорема о двух милиционерах): *если начиная с некоторого номера выполняется $a_n \le b_n \le c_n$ и*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a,$$

то последовательность $\{b_n\}$ также сходится к a.

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется **последовательностью Коши (фундаментальной последовательностью)**, если справедливо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \ge N_\varepsilon : \quad |a_n + a_m| < \varepsilon,$$

или в эквивалентной форме

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge N_\varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N} : \quad \left|a_n + a_{n+p}\right| < \varepsilon.$$

Справедлив следующий **критерий Коши** сходимости числовой последовательности: *последовательность $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ является сходящейся тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Последовательность $\{a_n\}$ называется **возрастающей (убывающей)**, если выполняется

$$a_{n+1} \ge a_n \;\; (a_n \ge a_{n+1}), \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Если неравенство является строгим, то говорят о **строго возрастающей (убывающей)** последовательности. (Строго) возрастающие и убывающие последовательности обобщенно называют **монотонными**.

Справедлив следующий **критерий сходимости монотонной последовательности**: *если последованность a_n монотонно возрастает (убывает), начиная с некоторого номера, то она является сходящейся тогда и только тогда, когда она ограничена. Более того*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\} \quad \left(\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}\right).$$

Пусть дана последовательность $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, а также последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$. Последовательность $\left\{a_{n_k}\right\}$ называется **подпоследовательностью** $\{a_n\}$.

Если $a_{n_k} \to a \in \mathbb{R},\ k \to \infty$, то говорят, что a — **частичный предел** $\{a_n\}$. **Верхним (нижним) пределом** последовательности называется верхняя (нижняя) точная граница множества частичных пределов последовательности, она обозначается

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \quad \left(\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n\right).$$

В связи с введёнными определениями вводится следующий критерий сходимости: *для сходимости ограниченной последовательности $\{a_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n.$$

Отсюда, в частности, следует, что у сходящейся последовательности все частичные пределы совпадают.

Решение задач

Задача средняя (2)

Покажите, что если a_n и b_n — расходящиеся последовательности, то о сходимости $c_n = a_n + b_n$ нельзя судить без дополнительных сведений о последовательностях a_n и b_n.

Подсказка

Приведите пример двух расходящихся последовательностей a_n и b_n таких, что $c_n = a_n + b_n$ — раходится, и ещё двух других расходящихся последовательностей a'_n, b'_n таких, что $c'_n = a'_n + b'_n$ — сходится.

Решение:

Для доказательства данного утверждения достаточно придумать 2 примера расходящихся последовательностей a_n, b_n, в первом из которых $c_n = a_n + b_n$ — расходится, а во втомом — сходится.

В качестве первого примера возьмём $a_n = b_n = \frac{n}{2}$. Очевидно, $a_n = b_n = \frac{n}{2} \to \infty$ при $n \to \infty$ и $c_n = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} \to \infty$, $n \to \infty$ — расходятся.

В качестве второго примера можно выбрать $a_n = \sqrt{n}$, $b_n = -\sqrt{n} + 1$. В данном случае, несмотря на то, что $a_n = \sqrt{n} \to \infty$, $b_n = -\sqrt{n} + 1 \to \infty$ при $n \to \infty$ — расходятся, сумма последовательностей $c_n = a_n + b_n = \sqrt{n} + \left(-\sqrt{n} + 1\right) = 1$ является сходящейся.

Утверждение доказано. Для наглядности визуализируем последний пример.

Sequence a_n, b_n, c_n behaviour on graph