Theoremsy / Теоре́мзи

Математический анализ

Условия сходимости последовательностей

задачи и решения

Автор:
Кулаго А. С., ММФ БГУ
andrejs.kulago@icloud.com

Обновлено:
20.07.2025

Ресурс:
https://theoremsy.com

2025, Минск

Теоретическая сводка

Пусть даны две числовые последовательности a_n и b_n:

1. если a_n и b_n сходятся, то последовательность $c_n = a_n + b_n$ — сходится;
2. если a_n сходится, а b_n расходится, то $c_n = a_n + b_n$ — расходится;
3. если a_n и b_n расходятся, то о сходимости $c_n = a_n + b_n$ нельзя судить без дополнительных сведений о последовательностях a_n и b_n.

В выяснении сходимости последовательностей часто бывает удобной **теорема о зажатой последовательности** (теорема о двух милиционерах): *если начиная с некоторого номера выполняется $a_n \le b_n \le c_n$ и*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a,$$

то последовательность $\{b_n\}$ также сходится к a.

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется **последовательностью Коши (фундаментальной последовательностью)**, если справедливо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \ge N_\varepsilon : \quad |a_n + a_m| < \varepsilon,$$

или в эквивалентной форме

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge N_\varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N} : \quad \left|a_n + a_{n+p}\right| < \varepsilon.$$

Справедлив следующий **критерий Коши** сходимости числовой последовательности: *последовательность $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ является сходящейся тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Последовательность $\{a_n\}$ называется **возрастающей (убывающей)**, если выполняется

$$a_{n+1} \ge a_n \ \ (a_n \ge a_{n+1}), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Если неравенство является строгим, то говорят о **строго возрастающей (убывающей)** последовательности. (Строго) возрастающие и убывающие последовательности обобщенно называют **монотонными**.

Справедлив следующий **критерий сходимости монотонной последовательности**: *если последованность a_n монотонно возрастает (убывает), начиная с некоторого номера, то она является сходящейся тогда и только тогда, когда она ограничена. Более того*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\} \quad \left(\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}\right).$$

Пусть дана последовательность $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, а также последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$. Последовательность $\left\{a_{n_k}\right\}$ называется **подпоследовательностью** $\{a_n\}$.

Если $a_{n_k} \to a \in \mathbb{R},\ k \to \infty$, то говорят, что a — **частичный предел** $\{a_n\}$. **Верхним (нижним) пределом** последовательности называется верхняя (нижняя) точная граница множества частичных пределов последовательности, она обозначается

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \quad \left(\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n\right).$$

В связи с введёнными определениями вводится следующий критерий сходимости: *для сходимости ограниченной последовательности $\{a_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n.$$

Отсюда, в частности, следует, что у сходящейся последовательности все частичные пределы совпадают.

Решение задач

Задача сложная (16)

Рассмотреть последовательности

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Показать, что

1. a_n монотонно возрастет и ограничена сверху,
2. b_n монотонно убывает и ограничена снизу,
3. a_n и b_n сходятся к одному и тому же пределу $e \in \mathbb{R}$.

Подсказка

Для доказательства монотонности последовательностей a_n и b_n покажите, соответственно, что $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ и $\frac{b_n}{b_{n+1}} > 1$. При оценке данных отношений воспользуйтесь *неравенством Бернулли* (см. «Математическая индукция»)

$$\prod_{i=1}^{n}(1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

где $x_i > -1$, при чём все x_i — одного знака.
Для доказательства ограниченности a_n и b_n воспользуйтесь неравенством $a_n < b_n$.

Решение:

Покажем для начала, что последовательность a_n возрастает. Рассмотрим отношение $(n+1)$-го и n-го членов последовательности

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} =$$

$$= \left(\frac{(n+2)\cdot n}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1} =$$

$$= \left(\frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1} \geq \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) \cdot \frac{n+2}{n+1} =$$

$$= \frac{\left(n^2 + n + 1\right)\cdot(n+2)}{(n+1)^3} \geq \frac{\left(n^3 + 3n^2 + 3n + 1\right) + 1}{(n+1)^3} > 1.$$

Здесь для оценки снизу было использовано обобщённое *неравенство Бернулли* (см. «Математическая индукция»)

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \geq 1+\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

где $x_i > -1$, при чём все x_i — одного знака.

Аналогично покажем убывание последовательности b_n. Будем рассматривать отношение n-го и $(n+1)$-го членов последовательности

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} =$$

$$= \left(\frac{(n+1)^2}{n\cdot(n+2)}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} = \left(1+\frac{1}{n\cdot(n+2)}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} \geq$$

$$\geq \left(1+\frac{n+1}{n\cdot(n+2)}\right) \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{\left(n^2+3n+1\right)\cdot(n+1)}{n\cdot(n+2)^2} =$$

$$= \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} > 1.$$

Для доказательства ограниченности рассматриваемых последовательностей достаточно показать, что $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n < b_n$. Действительно, при выполнении данного неравенства a_n будет ограничена первым элементом b_1 убывающей последовательности b_n, а b_n — ограничена первым членом a_1 возрастающей последовательности a_n

$$0 < a_1 < a_n < b_n < b_1 < 4.$$

Итак, посредством эквивалентных преобразований докажем необходимое утверждение

$$a_n < b_n$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$1 < 1+\frac{1}{n}$$

$$0 < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку $a_n, \ b_n$ монотонные ограниченные последовательности, они являются сходящимися

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Осталось лишь показать, что a_n и b_n сходятся к одному и тому же числу, т. е. $a = b$. Рассмотрим следующий предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1.$$

Но поскольку a_n, b_n сходятся и $a_n > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} b_n}{\lim_{n\to\infty} a_n} = \frac{b}{a} = 1 \implies e \overset{\text{def}}{=} a = b \approx 2.71828.$$

Для наглядности визуализируем сходимость данных последовательностей.