Theoremsy / Теоре́мзи

Математический анализ

Условия сходимости последовательностей

задачи и решения

Автор:
Кулаго А. С., ММФ БГУ
andrejs.kulago@icloud.com

Обновлено:
20.07.2025

Ресурс:
https://theoremsy.com

2025, Минск

Теоретическая сводка

Пусть даны две числовые последовательности a_n и b_n:

1. если a_n и b_n сходятся, то последовательность $c_n = a_n + b_n$ — сходится;
2. если a_n сходится, а b_n расходится, то $c_n = a_n + b_n$ — расходится;
3. если a_n и b_n расходятся, то о сходимости $c_n = a_n + b_n$ нельзя судить без дополнительных сведений о последовательностях a_n и b_n.

В выяснении сходимости последовательностей часто бывает удобной **теорема о зажатой последовательности** (теорема о двух милиционерах): *если начиная с некоторого номера выполняется $a_n \le b_n \le c_n$ и*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a,$$

то последовательность $\{b_n\}$ также сходится к a.

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется **последовательностью Коши (фундаментальной последовательностью)**, если справедливо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \ge N_\varepsilon : \quad |a_n + a_m| < \varepsilon,$$

или в эквивалентной форме

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge N_\varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N} : \quad \left|a_n + a_{n+p}\right| < \varepsilon.$$

Справедлив следующий **критерий Коши** сходимости числовой последовательности: *последовательность $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ является сходящейся тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Последовательность $\{a_n\}$ называется **возрастающей (убывающей)**, если выполняется

$$a_{n+1} \ge a_n \;\; (a_n \ge a_{n+1}), \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Если неравенство является строгим, то говорят о **строго возрастающей (убывающей)** последовательности. (Строго) возрастающие и убывающие последовательности обобщенно называют **монотонными**.

Справедлив следующий **критерий сходимости монотонной последовательности**: *если последованность a_n монотонно возрастает (убывает), начиная с некоторого номера, то она является сходящейся тогда и только тогда, когда она ограничена. Более того*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\} \quad \left(\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}\right).$$

Пусть дана последовательность $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, а также последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$. Последовательность $\left\{a_{n_k}\right\}$ называется **подпоследовательностью** $\{a_n\}$.

Если $a_{n_k} \to a \in \mathbb{R},\ k \to \infty$, то говорят, что a — **частичный предел** $\{a_n\}$. **Верхним (нижним) пределом** последовательности называется верхняя (нижняя) точная граница множества частичных пределов последовательности, она обозначается

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \quad \left(\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n\right).$$

В связи с введёнными определениями вводится следующий критерий сходимости: *для сходимости ограниченной последовательности $\{a_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n.$$

Отсюда, в частности, следует, что у сходящейся последовательности все частичные пределы совпадают.

Решение задач

Задача средняя (15)

Пользуясь критерием сходимости монотонной последовательности доказать, что

$$a_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n}$$

является сходящейся.

Подсказка

Используя метод математической индукции (см. «Математическая индукция»), покажите, что рассматриваемая последовательность является возрастающей и ограниченной сверху.

Решение:

Используя метод математической индукции (см. «Математическая индукция»), покажем, что рассматриваемая последовательность является возрастающей и ограниченной сверху. Начнём с монотонности a_n. База индукции выполняется в силу

$$a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} > a_1 = \sqrt{2}.$$

Принимая в качестве данного $a_k > a_{k-1}$, покажем, что $a_{k+1} > a_k$

$$a_{k+1}^2 - a_k^2 = \left(\sqrt{2 + a_k}\right)^2 - \left(\sqrt{2 + a_{k-1}}\right)^2 = a_k - a_{k-1} > 0.$$

Таким образом, совершив индукционный переход, возрастание a_n доказано.

Покажем теперь, что a_n ограничена сверху числом 2. База индукции выполняется: $a_1 = \sqrt{2} < 2$. Пусть теперь $a_k \leq 2$, тогда нетрудно совершить индукционный переход

$$a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k} < \sqrt{2 + 2} = 2.$$

Итак, рассматриваемая последовательность является возрастающей и ограниченной сверху, следовательно, сходящейся.