Theoremsy / Теорéмзи

Математический анализ

Условия сходимости последовательностей

задачи и решения

Автор:
Кулаго А. С., ММФ БГУ
andrejs.kulago@icloud.com

Обновлено:
20.07.2025

Ресурс:
https://theoremsy.com

2025, Минск

Теоретическая сводка

Пусть даны две числовые последовательности a_n и b_n:

1. если a_n и b_n сходятся, то последовательность $c_n = a_n + b_n$ — сходится;
2. если a_n сходится, а b_n расходится, то $c_n = a_n + b_n$ — расходится;
3. если a_n и b_n расходятся, то о сходимости $c_n = a_n + b_n$ нельзя судить без дополнительных сведений о последовательностях a_n и b_n.

В выяснении сходимости последовательностей часто бывает удобной **теорема о зажатой последовательности** (теорема о двух милиционерах): *если начиная с некоторого номера выполняется $a_n \le b_n \le c_n$ и*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a,$$

то последовательность $\{b_n\}$ также сходится к a.

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется **последовательностью Коши (фундаментальной последовательностью)**, если справедливо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \ge N_\varepsilon : \quad |a_n + a_m| < \varepsilon,$$

или в эквивалентной форме

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge N_\varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N} : \quad \left|a_n + a_{n+p}\right| < \varepsilon.$$

Справедлив следующий **критерий Коши** сходимости числовой последовательности: *последовательность $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ является сходящейся тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Последовательность $\{a_n\}$ называется **возрастающей (убывающей)**, если выполняется

$$a_{n+1} \ge a_n \ \ (a_n \ge a_{n+1}), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Если неравенство является строгим, то говорят о **строго возрастающей (убывающей)** последовательности. (Строго) возрастающие и убывающие последовательности обобщенно называют **монотонными**.

Справедлив следующий **критерий сходимости монотонной последовательности**: *если последованность a_n монотонно возрастает (убывает), начиная с некоторого номера, то она является сходящейся тогда и только тогда, когда она ограничена. Более того*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\} \quad \left(\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}\right).$$

Пусть дана последовательность $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, а также последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$. Последовательность $\left\{a_{n_k}\right\}$ называется **подпоследовательностью** $\{a_n\}$.

Если $a_{n_k} \to a \in \mathbb{R},\ k \to \infty$, то говорят, что a — **частичный предел** $\{a_n\}$. **Верхним (нижним) пределом** последовательности называется верхняя (нижняя) точная граница множества частичных пределов последовательности, она обозначается

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \quad \left(\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n\right).$$

В связи с введёнными определениями вводится следующий критерий сходимости: *для сходимости ограниченной последовательности* $\{a_n\}$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n.$$

Отсюда, в частности, следует, что у сходящейся последовательности все частичные пределы совпадают.

Решение задач

Задача сложная (10)

Пользуясь критерием Коши, доказать, что последовательность

$$a_n = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \ldots + \frac{1}{\ln(n+1)} = \sum_{k=1}^{\ln n} \frac{1}{\ln(k+1)}$$

является расходящейся.

Подсказка

Критерий Коши не выполняется, если

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \exists n_0 > N_\varepsilon \quad \exists p_0 > 0 : \quad \left|a_{n_0+p_0} - a_{n_0}\right| \geq \varepsilon.$$

При оценке модуля разности n_0-го и $(n_0 + p_0)$-го членов последовательности примите $p_0 = n_0$.

Решение:

Если для последовательности не выпоняется критерий Коши, по определнию это значит

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \exists n_0 > N_\varepsilon \quad \exists p_0 > 0 : \quad \left|a_{n_0+p_0} - a_{n_0}\right| \geq \varepsilon.$$

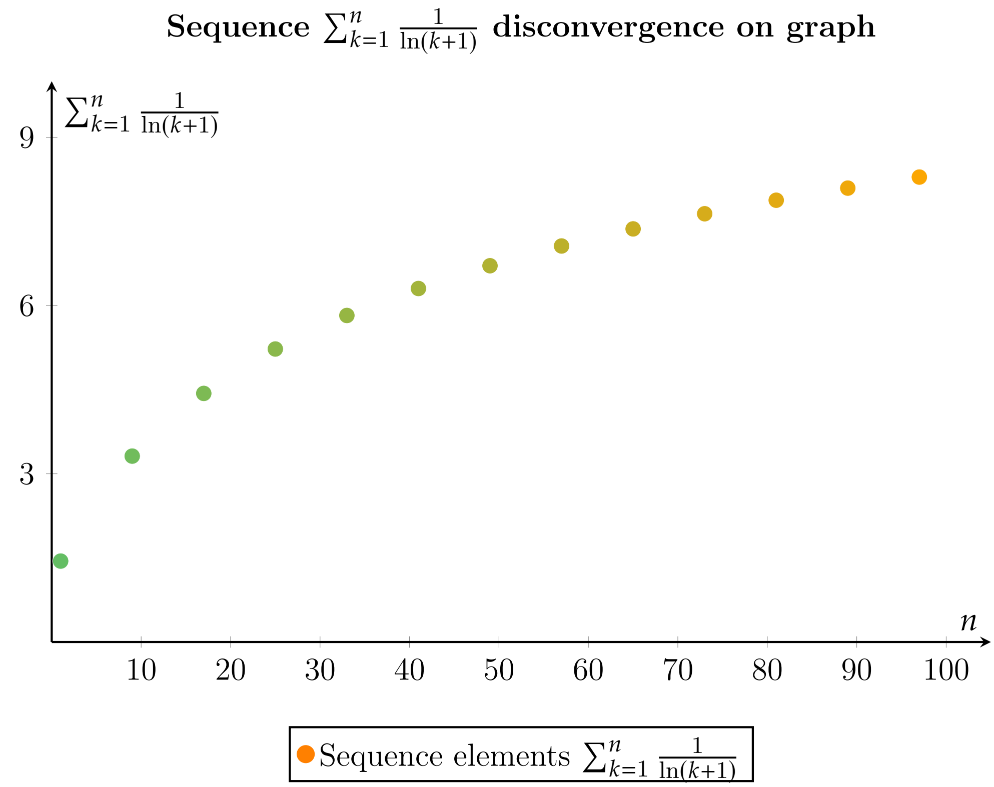
Рассмотрим модуль разности n_0-го и $(n_0 + p_0)$-го членов последовательности и оценим его снизу, пользуясь неравенством $\ln n < n$,

$$\left|a_{n_0+p_0} - a_{n_0}\right| = \underbrace{\frac{1}{\ln(n_0+2)} + \frac{1}{\ln(n_0+3)} + \ldots + \frac{1}{\ln(n_0+p_0+1)}}_{p_0} >$$

$$> p_0 \cdot \left.\frac{1}{\ln(n_0+p_0+1)}\right|_{p_0=n_0} = \frac{n_0}{\ln(2n_0+1)} > \frac{n_0}{2n_0+1} > \frac{1}{4} = \varepsilon_0.$$

Таким образом, чтобы доказать, что критерий Коши не выполняется, достаточно взять $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$ и $p_0 = n_0 = N_\varepsilon + 1$.

Для наглядности визуализируем расходимость рассматриваемой последовательности.


Sequence $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\ln(k+1)}$ disconvergence on graph
$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\ln(k+1)}$
9
6
3
n
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100
Sequence elements $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\ln(k+1)}$