Theoremsy / Теоре́мзи

Математический анализ

Условия сходимости последовательностей

задачи и решения

Автор:
Кулаго А. С., ММФ БГУ
andrejs.kulago@icloud.com

Обновлено:
20.07.2025

Ресурс:
https://theoremsy.com

2025, Минск

Теоретическая сводка

Пусть даны две числовые последовательности a_n и b_n:

1. если a_n и b_n сходятся, то последовательность $c_n = a_n + b_n$ — сходится;
2. если a_n сходится, а b_n расходится, то $c_n = a_n + b_n$ — расходится;
3. если a_n и b_n расходятся, то о сходимости $c_n = a_n + b_n$ нельзя судить без дополнительных сведений о последовательностях a_n и b_n.

В выяснении сходимости последовательностей часто бывает удобной **теорема о зажатой последовательности** (теорема о двух милиционерах): *если начиная с некоторого номера выполняется $a_n \leq b_n \leq c_n$ и*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a,$$

то последовательность $\{b_n\}$ также сходится к a.

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется **последовательностью Коши (фундаментальной последовательностью)**, если справедливо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq N_\varepsilon : \quad |a_n + a_m| < \varepsilon,$$

или в эквивалентной форме

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_\varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N} : \quad \left|a_n + a_{n+p}\right| < \varepsilon.$$

Справедлив следующий **критерий Коши** сходимости числовой последовательности: *последовательность $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ является сходящейся тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Последовательность $\{a_n\}$ называется **возрастающей (убывающей)**, если выполняется

$$a_{n+1} \geq a_n \ \ (a_n \geq a_{n+1}), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Если неравенство является строгим, то говорят о **строго возрастающей (убывающей)** последовательности. (Строго) возрастающие и убывающие последовательности обобщенно называют **монотонными**.

Справедлив следующий **критерий сходимости монотонной последовательности**: *если последованность a_n монотонно возрастает (убывает), начиная с некоторого номера, то она является сходящейся тогда и только тогда, когда она ограничена. Более того*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\} \quad \left(\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}\right).$$

Пусть дана последовательность $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, а также последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$. Последовательность $\left\{a_{n_k}\right\}$ называется **подпоследовательностью** $\{a_n\}$.

Если $a_{n_k} \to a \in \mathbb{R},\ k \to \infty$, то говорят, что a — **частичный предел** $\{a_n\}$. **Верхним (нижним) пределом** последовательности называется верхняя (нижняя) точная граница множества частичных пределов последовательности, она обозначается

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \quad \left(\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n\right).$$

В связи с введёнными определениями вводится следующий критерий сходимости: *для сходимости ограниченной последовательности* $\{a_n\}$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n.$$

Отсюда, в частности, следует, что у сходящейся последовательности все частичные пределы совпадают.

Решение задач

Задача простая (1)

Проверить на сходимость последовательность

$$a_n = \frac{1}{\ln n} + \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right), \; n > 2.$$

Подсказка

Покажите, что последовательность a_n, есть сумма сходящейся и расходящейся последовательностей.

Решение:

Рассмотрим a_n как сумму двух последовательностей

$$a_n = \underbrace{\frac{1}{\ln n}}_{b_n} + \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)}_{c_n}.$$

Покажем, что b_n — сходящаяся последовательность. Действительно, поскольку b_n — ограниченная $\left(\forall n > 2 : \left(\frac{1}{\ln n}\right) < 1\right)$, монотонно убывающая $\left(\ln n < \ln n + 1 \implies \frac{1}{\ln n+1} < \frac{1}{\ln n}\right)$ последовательность, исходя из критерия сходимости монотонной последовательности, следует сходимость b_n.

Установим теперь поведение последовательности c_n. Выделим из c_n две подпоследовательности: $c_{n_{k_1}} = c_{2k_1}$ и $c_{n_{k_2}} = c_{4k_2+1}$, т. е. выберем в первом случае только чётные номера, а во втором только те номера, что дают остаток 1 при делении на 4.

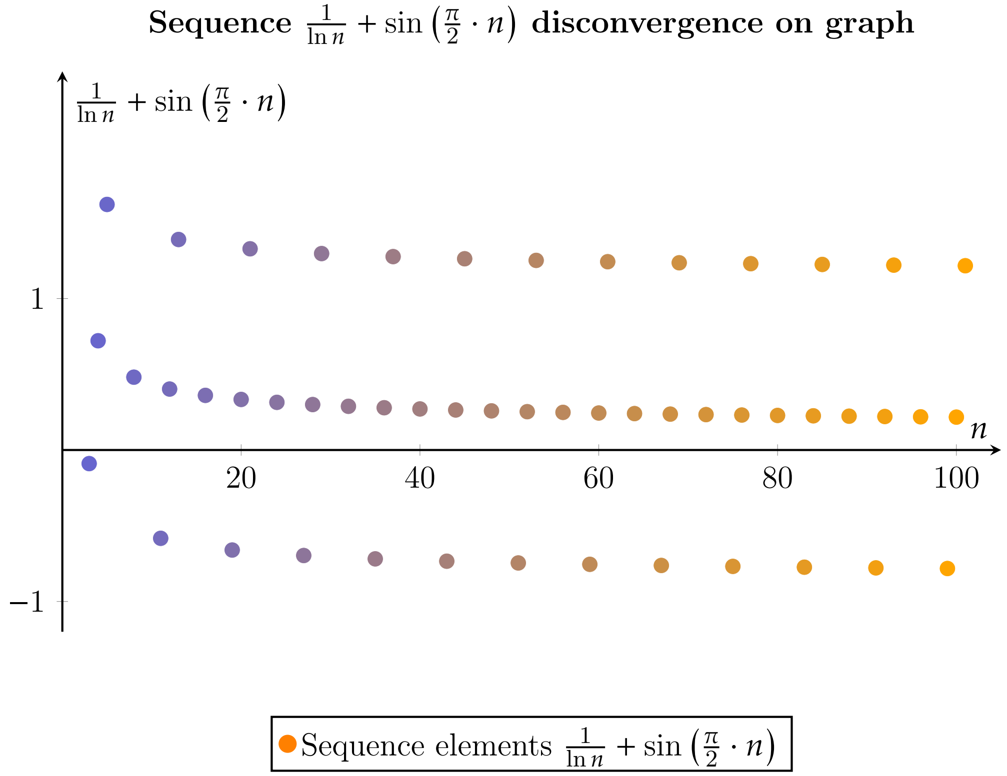
Очевидно, что

$$\lim_{k_1 \to \infty} c_{2k_1} = 0, \quad \lim_{k_2 \to \infty} c_{4k_2+1} = 1.$$

Итак, мы выделили две подпоследовательности из c_n, сходящиеся к разным пределам. Поскольку у сходящейся последовательности все частичные пределы совпадают, c_n яляется расходящейся последовательностью.

Мы получили, что a_n есть сумма сходящейся и расходящейся последовательностей, откуда вытекает расходимость a_n.

Для наглядности визуализируем расходимость данной последовательности.


Sequence $\frac{1}{\ln n} + \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)$ disconvergence on graph
$\frac{1}{\ln n} + \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)$
1
−1
n
20
40
60
80
100
Sequence elements $\frac{1}{\ln n} + \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)$