Theoremsy / Теоре́мзи

Математический анализ

# Условия сходимости последовательностей

задачи и решения

**Автор:**
Кулаго А. С., ММФ БГУ
andrejs.kulago@icloud.com

**Обновлено:**
20.07.2025

**Ресурс:**
https://theoremsy.com

2025, Минск

# Теоретическая сводка

Пусть даны две числовые последовательности $a_n$ и $b_n$:

1. если $a_n$ и $b_n$ сходятся, то последовательность $c_n = a_n + b_n$ — сходится;
2. если $a_n$ сходится, а $b_n$ расходится, то $c_n = a_n + b_n$ — расходится;
3. если $a_n$ и $b_n$ расходятся, то о сходимости $c_n = a_n + b_n$ нельзя судить без дополнительных сведений о последовательностях $a_n$ и $b_n$.

В выяснении сходимости последовательностей часто бывает удобной **теорема о зажатой последовательности** (теорема о двух милиционерах): *если начиная с некоторого номера выполняется* $a_n \le b_n \le c_n$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a,$$

*то последовательность* $\{b_n\}$ *также сходится к* $a$.

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется **последовательностью Коши (фундаментальной последовательностью)**, если справедливо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \ge N_\varepsilon : \quad |a_n + a_m| < \varepsilon,$$

или в эквивалентной форме

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge N_\varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N} : \quad \left|a_n + a_{n+p}\right| < \varepsilon.$$

Справедлив следующий **критерий Коши** сходимости числовой последовательности: *последовательность* $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ *является сходящейся тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Последовательность $\{a_n\}$ называется **возрастающей (убывающей)**, если выполняется

$$a_{n+1} \ge a_n \ \ (a_n \ge a_{n+1}), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Если неравенство является строгим, то говорят о **строго возрастающей (убывающей)** последовательности. (Строго) возрастающие и убывающие последовательности обобщенно называют **монотонными**.

Справедлив следующий **критерий сходимости монотонной последовательности**: *если последованность* $a_n$ *монотонно возрастает (убывает), начиная с некоторого номера, то она является сходящейся тогда и только тогда, когда она ограничена. Более того*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\} \quad \left(\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}\right).$$

Пусть дана последовательность $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, а также последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$. Последовательность $\left\{a_{n_k}\right\}$ называется **подпоследовательностью** $\{a_n\}$.

Если $a_{n_k} \to a \in \mathbb{R},\ k \to \infty$, то говорят, что $a$ — **частичный предел** $\{a_n\}$. **Верхним (нижним) пределом** последовательности называется верхняя (нижняя) точная граница множества частичных пределов последовательности, она обозначается

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \quad \left(\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n\right).$$

В связи с введёнными определениями вводится следующий критерий сходимости: *для сходимости ограниченной последовательности* $\{a_n\}$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n.$$

Отсюда, в частности, следует, что у сходящейся последовательности все частичные пределы совпадают.

# Решение задач

## Задача простая (1)

Проверить на сходимость последовательность

$$a_n = \frac{1}{\ln n} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right), \; n > 2.$$

**Подсказка**

Покажите, что последовательность $a_n$, есть сумма сходящейся и расходящейся последовательностей.

**Решение:**

Рассмотрим $a_n$ как сумму двух последовательностей

$$a_n = \underbrace{\frac{1}{\ln n}}_{b_n} + \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)}_{c_n}.$$

Покажем, что $b_n$ — сходящаяся последовательность. Действительно, поскольку $b_n$ — ограниченная $\left(\forall n > 2: \; \left(\frac{1}{\ln n}\right) < 1\right)$, монотонно убывающая $\left(\ln n < \ln n + 1 \implies \frac{1}{\ln n+1} < \frac{1}{\ln n}\right)$ последовательность, исходя из критерия сходимости монотонной последовательности, следует сходимость $b_n$.

Установим теперь поведение последовательности $c_n$. Выделим из $c_n$ две подпоследовательности: $c_{n_{k_1}} = c_{2k_1}$ и $c_{n_{k_2}} = c_{4k_2+1}$, т. е. выберем в первом случае только чётные номера, а во втором только те номера, что дают остаток 1 при делении на 4.

Очевидно, что

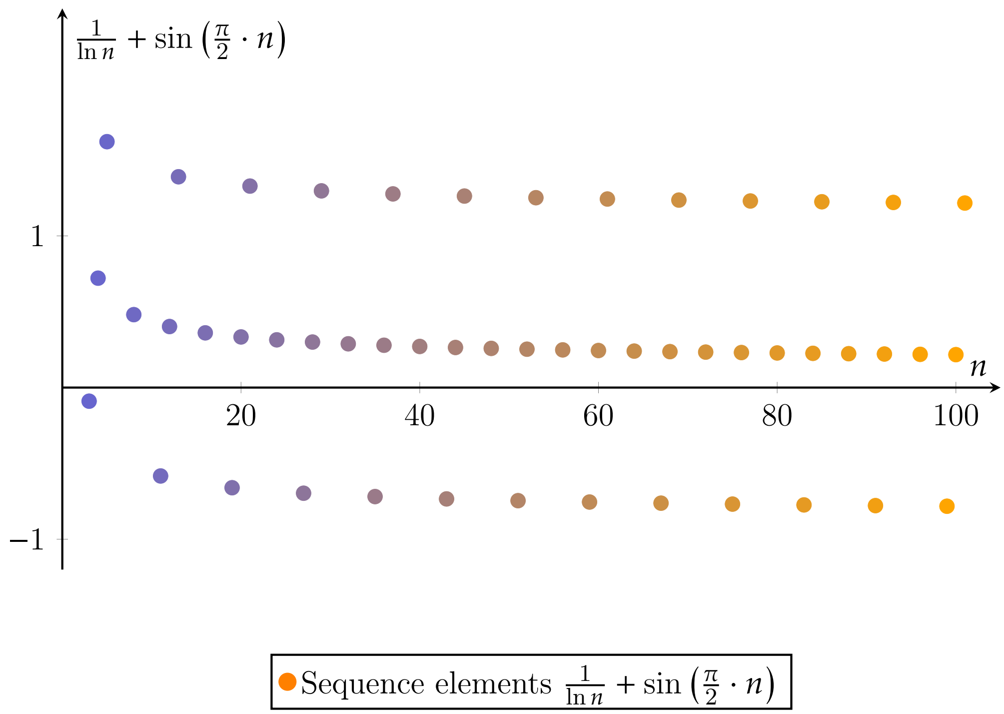
$$\lim_{k_1\to\infty} c_{2k_1} = 0, \quad \lim_{k_2\to\infty} c_{4k_2+1} = 1.$$

Итак, мы выделили две подпоследовательности из $c_n$, сходящиеся к разным пределам. Поскольку у сходящейся последовательности все частичные пределы совпадают, $c_n$ яляется расходящейся последовательностью.

Мы получили, что $a_n$ есть сумма сходящейся и расходящейся последовательностей, откуда вытекает расходимость $a_n$.

Для наглядности визуализируем расходимость данной последовательности.

**Sequence $\frac{1}{\ln n} + \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)$ disconvergence on graph**



**Задача средняя (2)**

Покажите, что если $a_n$ и $b_n$ — расходящиеся последовательности, то о сходимости $c_n = a_n + b_n$ нельзя судить без дополнительных сведений о последовательностях $a_n$ и $b_n$.

**Подсказка**

Приведите пример двух расходящихся последовательностей $a_n$ и $b_n$ таких, что $c_n = a_n + b_n$ — раходится, и ещё двух других расходящихся последовательностей $a'_n$, $b'_n$ таких, что $c'_n = a'_n + b'_n$ — сходится.

**Решение:**

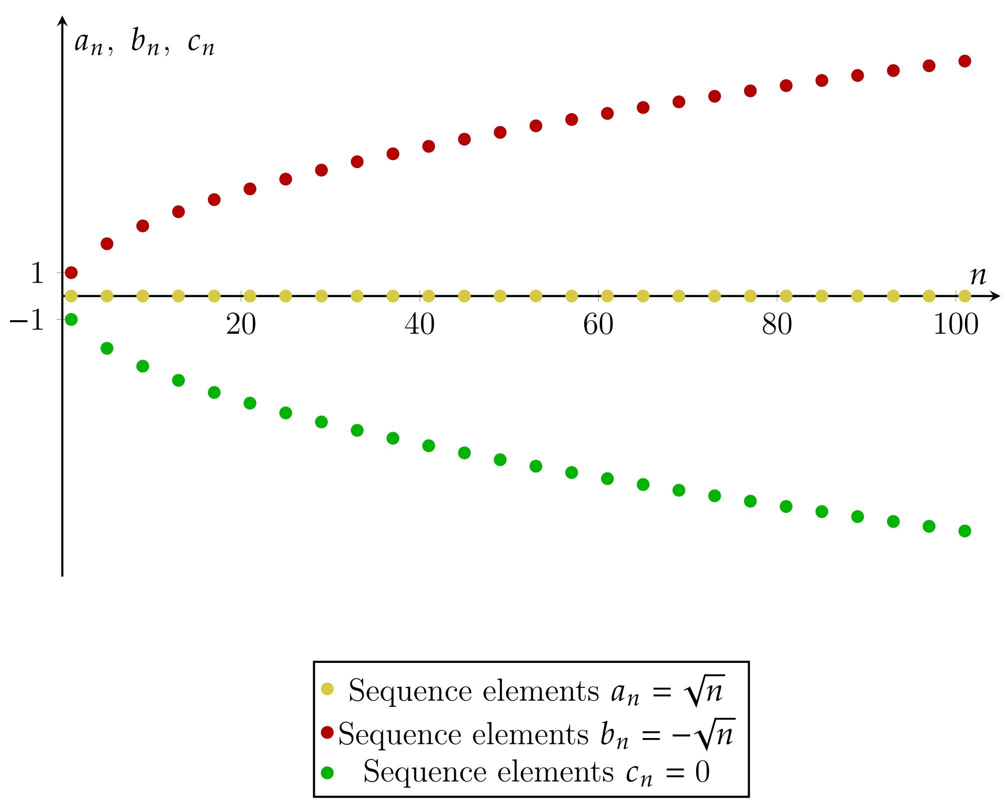
Для доказательства данного утверждения достаточно придумать 2 примера расходящихся последовательностей $a_n,\ b_n$, в первом из которых $c_n = a_n + b_n$ — расходится, а во втомом — сходится.

В качестве первого примера возьмём $a_n = b_n = \frac{n}{2}$. Очевидно, $a_n = b_n = \frac{n}{2} \to \infty$ при $n \to \infty$ и $c_n = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} \to \infty,\ n \to \infty$ — расходятся.

В качестве второго примера можно выбрать $a_n = \sqrt{n},\ b_n = -\sqrt{n} + 1$. В данном случае, несмотря на то, что $a_n = \sqrt{n} \to \infty,\ b_n = -\sqrt{n} + 1 \to \infty$ при $n \to \infty$ — расходятся, сумма последовательностей $c_n = a_n + b_n = \sqrt{n} + \left(-\sqrt{n} + 1\right) = 1$ является сходящейся.

Утверждение доказано. Для наглядности визуализируем последний пример.

**Sequence $a_n,\ b_n,\ c_n$ behaviour on graph**



**Задача средняя (3)**

Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость последовательности

$$a_n = \frac{6n-1}{3n-2}.$$

**Подсказка**

Для всякого $\varepsilon > 0$ определите число $N_\varepsilon = N_\varepsilon(\varepsilon)$ такое, что $\forall n > N_\varepsilon\ \forall p > 0 : \left|a_{n+p} - a_n\right| < \varepsilon$.

**Решение:**

Рассмотрим модуль разности $n$-го и $(n+p)$-го членов последовательности

$$\left|a_{n+p} - a_n\right| = \left|\frac{6(n+p)-1}{3(n+p)-2} - \frac{6n-1}{3n-2}\right| =$$

$$= \left|\frac{[6(n+p)-1](3n-2) - [3(n+p)-2](6n-1)}{(3(n+p)-2)(3n-2)}\right| =$$

$$= \left|\frac{18n^2 - 12n + 18np - 12p - 3n + 2 - 18n^2 + 3n - 18np + 3p + 12n - 2}{9n^2 - 6n + 9np - 6p - 6n + 4}\right| =$$

$$= \left|\frac{-9p}{9n^2 + 9np - 12n - 6p + 4}\right| \leq \left|\frac{9p}{9np - 6p}\right| =$$

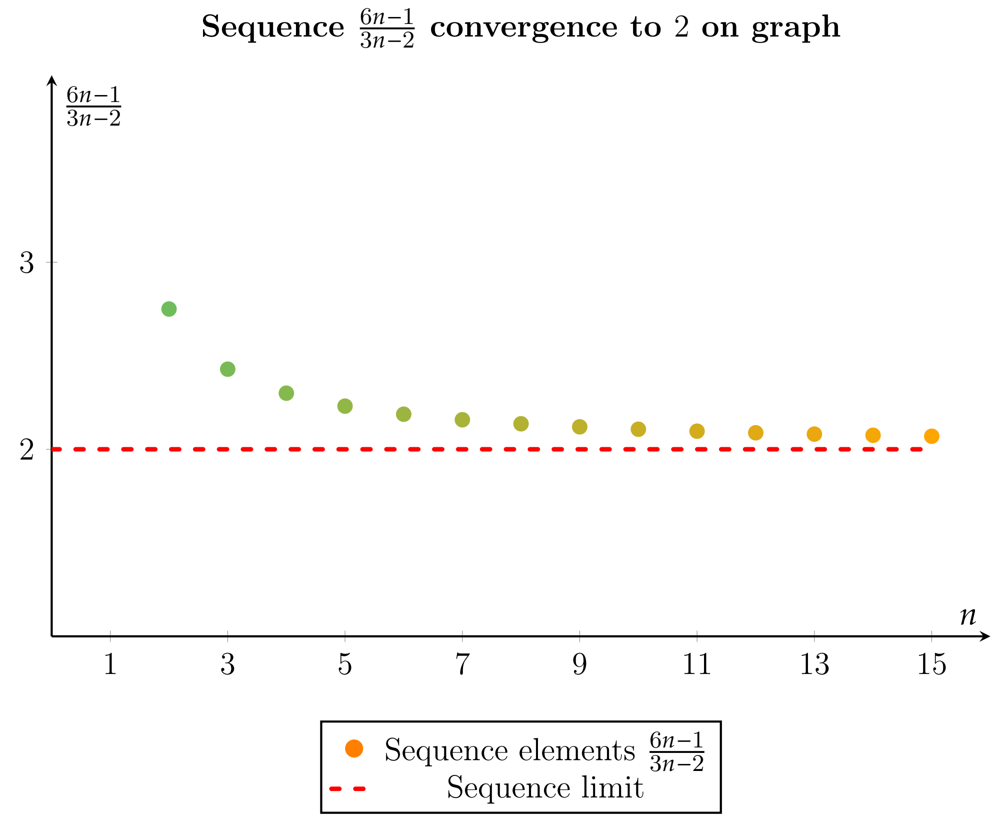
$$= \left|\frac{3}{3n-2}\right| \leq \frac{1}{n-1} < \varepsilon.$$

То есть лишь только

$$n > \frac{1}{\varepsilon} + 1,$$

будет выполняться требуемое условие $\left|a_{n+p} - a_n\right| < \varepsilon$. Таким образом, в качестве $N_\varepsilon$ достаточно взять $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

Для наглядности визуализируем сходимость рассматриваемой последовательности.


Sequence $\frac{6n-1}{3n-2}$ convergence to 2 on graph
$\frac{6n-1}{3n-2}$
3
2
$n$
1
3
5
7
9
11
13
15
Sequence elements $\frac{6n-1}{3n-2}$
Sequence limit

**Задача средняя (4)**

Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость последовательности

$$a_n = b_0 + b_1 q + \ldots + b_n q^n = \sum_{k=0}^{n} b_k q^k,$$

где $|b_k| < M,\ k \in \mathbb{N}$ и $|q| < 1$.

**Подсказка**

Для всякого $\varepsilon > 0$ определите число $N_\varepsilon = N_\varepsilon(\varepsilon)$ такое, что $\forall n > N_\varepsilon\ \forall p > 0$ : $\left|a_{n+p} - a_n\right| < \varepsilon$. При оценке модуля разности, пользуясь условием $|b_k| < M$, замените все множители $b_k$ на $M$, а затем примените формулу для суммы первых $n$ членов геометрической прогрессии.

**Решение:**

Рассмотрим модуль разности $n$-го и $(n+p)$-го членов последовательности

$$\left|a_{n+p} - a_n\right| = \left|\sum_{k=0}^{n+p} b_k q^k - \sum_{k=0}^{n} b_k q^k\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k q^k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |b_k| \cdot |q|^k < |q|^{n+1} M \cdot \sum_{k=0}^{p-1} |q|^k =$$

$$= |q|^{n+1} M \cdot \frac{|q|^p - 1}{|q| - 1} < \frac{M}{1 - |q|} \cdot |q|^{n+1} < \varepsilon.$$

Прологарифмируем последнее неравенство и выразим $n$

$$\frac{M}{1-|q|} \cdot |q|^{n+1} < \varepsilon$$

$$\ln \frac{M}{1-|q|} + (n+1) \ln |q| < \ln \varepsilon$$

$$(n+1) \cdot \ln |q| < \ln \varepsilon - \ln \frac{M}{1-|q|}$$

$$n > \ln \left(\frac{\varepsilon (1 - |q|)}{M}\right) \cdot \ln^{-1} |q| - 1.$$

Откуда следует, что в качестве $N_\varepsilon$ достаточно взять $N_\varepsilon = \left[\ln\left(\frac{\varepsilon(1-|q|)}{M}\right) \cdot \ln^{-1} |q|\right]$

**Задача средняя (5)**

Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость последовательности

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k \cdot \arcsin\frac{1}{k}}{2^k}.$$

**Подсказка**

Для всякого $\varepsilon > 0$ определите число $N_\varepsilon = N_\varepsilon(\varepsilon)$ такое, что $\forall n > N_\varepsilon \ \forall p > 0$ : $\left|a_{n+p} - a_n\right| < \varepsilon$. При оценке модуля разности воспользуйтесь очевидным неравенством $|\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2}$, а также формулой для суммы первых $n$ членов геометрической прогрессии.

**Решение:**

Оценим сверху модуль разности $n$-го и $(n+p)$-го членов последовательности, пользуясь неравенством $|\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2}$ и формулой для суммы первых $n$ членов геометрической прогрессии,

$$\left|a_{n+p} - a_n\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{(-1)^k \cdot \arcsin\frac{1}{k}}{2^k}\right| =$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \left|\sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k \cdot \arcsin\frac{1}{n+1+k}}{2^k}\right| \leq \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\left|\arcsin\frac{1}{n+1+k}\right|}{2^k} \leq$$

$$\leq \frac{\pi}{2^{n+2}} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{2^k} = \frac{\pi}{2^{n+2}} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p}{1 - \frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \frac{\pi}{2^n} < \varepsilon \implies \log_2 \frac{\pi}{\varepsilon} < n.$$

Откуда следует, что в качестве $N_\varepsilon$ достаточно взять $N_\varepsilon = \left[\log_2 \frac{\pi}{\varepsilon}\right] + 1$.

**Задача средняя (6)**

Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость последовательности

$$a_n = \frac{\cos 1!}{1\cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{\cos n!}{n\cdot(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos k!}{k\cdot(k+1)}.$$

**Подсказка**

Для всякого $\varepsilon > 0$ определите число $N_\varepsilon = N_\varepsilon(\varepsilon)$ такое, что $\forall n > N_\varepsilon\ \forall p > 0$ : $\left|a_{n+p} - a_n\right| < \varepsilon$. При оценке модуля разности воспользуйтесь неравенством $|\cos x| \le 1$, а также формулой

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

**Решение:**

Оценим сверху модуль разности $n$-го и $(n+p)$-го членов последовательности,

$$\left|a_{n+p} - a_n\right| = \left|\sum_{k=1}^{n+p} \frac{\cos k!}{k\cdot(k+1)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos k!}{k\cdot(k+1)}\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\cos k!}{k\cdot(k+1)}\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{|\cos k!|}{k\cdot(k+1)} \le \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k\cdot(k+1)} =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \cancel{\frac{1}{n+2}} + \cancel{\frac{1}{n+2}} - \cancel{\frac{1}{n+3}} + \ldots + \cancel{\frac{1}{n+p}} - \frac{1}{n+p+1} =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Здесь использовалась несложная формула

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Из полученной оценки следует, что в качестве $N_\varepsilon$ можно взять $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

**Задача средняя (7)**

Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость последовательности

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

**Подсказка**

Для всякого $\varepsilon > 0$ определите число $N_\varepsilon = N_\varepsilon(\varepsilon)$ такое, что $\forall n > N_\varepsilon \ \forall p > 0$ : $\left|a_{n+p} - a_n\right| < \varepsilon$. При оценке модуля разности воспользуйтесь неравенством

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

**Решение:**

В процессе доказательства нам пригодится следующее неравенство

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)\,n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}, \ n > 1.$$

Пользуясь последним, оценим сверху модуль разности $n$-го и $(n+p)$-го членов последовательности,

$$\left|a_{n+p} - a_n\right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) =$$

$$= \frac{1}{n} \underbrace{- \cancel{\frac{1}{n+1}} + \cancel{\frac{1}{n+1}}} \overbrace{- \cancel{\frac{1}{n+2}} + \ldots} \underbrace{+ \cancel{\frac{1}{n+p-1}} -} \frac{1}{n+p} =$$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Из последнего неравенства следует, что в качестве $N_\varepsilon$ можно взять $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

**Задача средняя (8)**

Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость последовательности

$$a_n = 3.\underbrace{111\ldots1}_{n}.$$

**Подсказка**

Для всякого $\varepsilon > 0$ определите число $N_\varepsilon = N_\varepsilon(\varepsilon)$ такое, что $\forall n > N_\varepsilon \ \forall p > 0 :$ $\left|a_{n+p} - a_n\right| < \varepsilon$.

**Решение:**

Оценим сверху модуль разности $n$-го и $(n+p)$-го членов последовательности

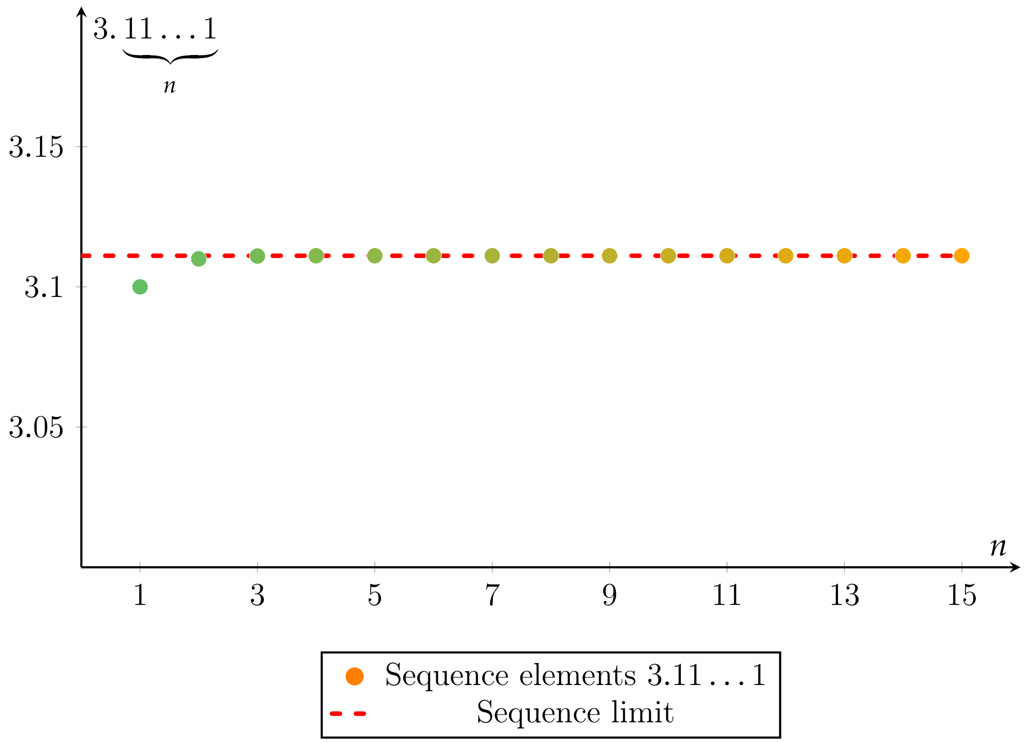
$$\left|a_{n+p} - a_n\right| = \left|\left(3 + \sum_{k=1}^{n+p} 0.1^k\right) - \left(3 + \sum_{k=1}^{n} 0.1^k\right)\right| =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} 0.1^k = 0.1^{n+1} \underbrace{\sum_{k=0}^{p-1} 0.1^k}_{<10} \leq 0.1^n < \varepsilon.$$

Логарифмируя последнее неравенство, получим, что в качестве $N_\varepsilon$ достаточно взять $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

Для наглядности визуализируем сходимость рассматриваемой последовательности.

**Sequence $3.\underbrace{11\ldots1}_{n}$ convergence to $\frac{10}{9}$ on graph**



**Задача сложная (9)**

Пользуясь критерием Коши, доказать, что последовательность

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

является расходящейся.

**Подсказка**

Критерий Коши не выполняется, если

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \exists n_0 > N_\varepsilon \quad \exists p_0 > 0 : \quad \left|a_{n_0+p_0} - a_{n_0}\right| \geq \varepsilon.$$

При оценке модуля разности $n_0$-го и $(n_0 + p_0)$-го членов последовательности примите $p_0 = n_0$.

**Решение:**

Если для последовательности не выпоняется критерий Коши, по определнию это значит

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \exists n_0 > N_\varepsilon \quad \exists p_0 > 0 : \quad \left|a_{n_0+p_0} - a_{n_0}\right| \geq \varepsilon.$$

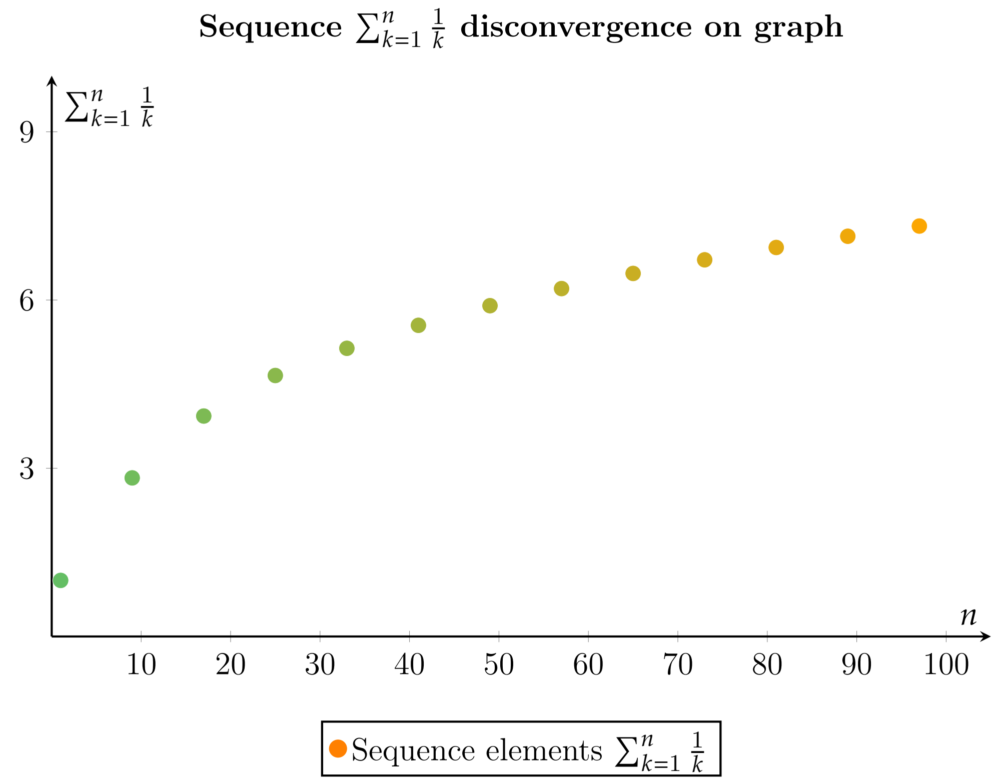
Рассмотрим модуль разности $n_0$-го и $(n_0 + p_0)$-го членов последовательности и оценим его снизу

$$\left|a_{n_0+p_0} - a_{n_0}\right| = \underbrace{\frac{1}{n_0+1} + \frac{1}{n_0+2} + \ldots + \frac{1}{n_0+p_0}}_{p_0} >$$

$$> p_0 \cdot \frac{1}{n_0+p_0}\bigg|_{p_0=n_0} = \frac{1}{2} = \varepsilon_0.$$

Таким образом, чтобы доказать, что критерий Коши не выполняется, достаточно взять $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ и $p_0 = n_0 = N_\varepsilon + 1$.

Для наглядности визуализируем расходимость рассматриваемой последовательности.


Sequence $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ disconvergence on graph
$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
9
6
3
$n$
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
Sequence elements $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

**Задача сложная (10)**

Пользуясь критерием Коши, доказать, что последовательность

$$a_n = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \ldots + \frac{1}{\ln(n+1)} = \sum_{k=1}^{\ln n} \frac{1}{\ln(k+1)}$$

является расходящейся.

**Подсказка**

Критерий Коши не выполняется, если

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \exists n_0 > N_\varepsilon \quad \exists p_0 > 0: \quad \left|a_{n_0+p_0} - a_{n_0}\right| \geq \varepsilon.$$

При оценке модуля разности $n_0$-го и $(n_0+p_0)$-го членов последовательности примите $p_0 = n_0$.

**Решение:**

Если для последовательности не выпоняется критерий Коши, по определнию это значит

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \exists n_0 > N_\varepsilon \quad \exists p_0 > 0: \quad \left|a_{n_0+p_0} - a_{n_0}\right| \geq \varepsilon.$$

Рассмотрим модуль разности $n_0$-го и $(n_0+p_0)$-го членов последовательности и оценим его снизу, пользуясь неравенством $\ln n < n$,

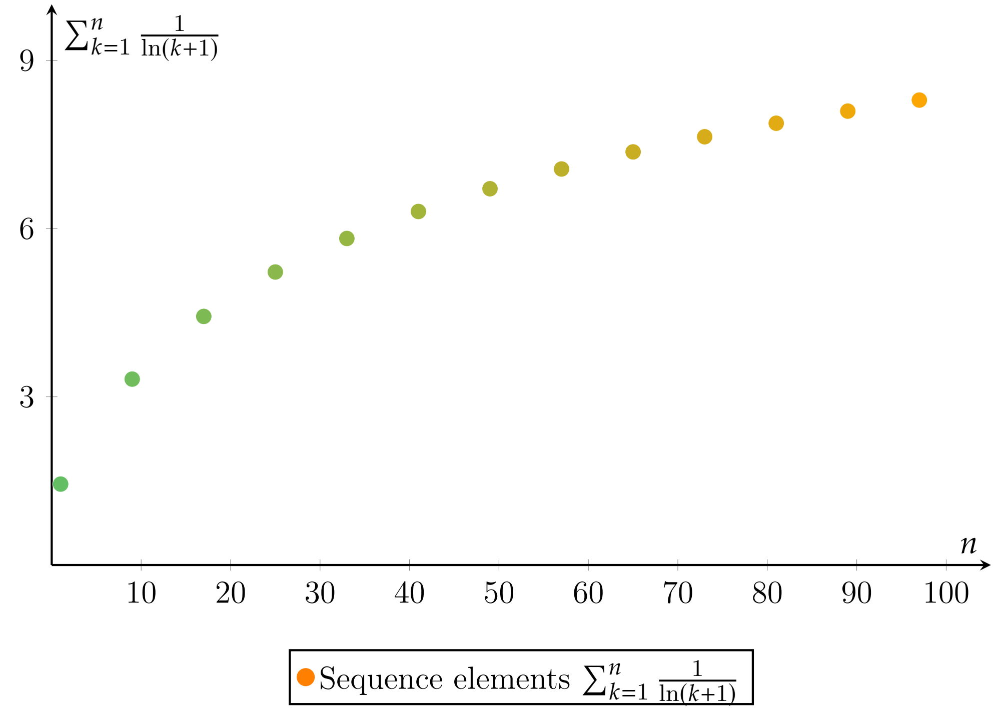
$$\left|a_{n_0+p_0} - a_{n_0}\right| = \underbrace{\frac{1}{\ln(n_0+2)} + \frac{1}{\ln(n_0+3)} + \ldots + \frac{1}{\ln(n_0+p_0+1)}}_{p_0} >$$

$$> p_0 \cdot \frac{1}{\ln(n_0+p_0+1)}\bigg|_{p_0=n_0} = \frac{n_0}{\ln(2n_0+1)} > \frac{n_0}{2n_0+1} > \frac{1}{4} = \varepsilon_0.$$

Таким образом, чтобы доказать, что критерий Коши не выполняется, достаточно взять $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$ и $p_0 = n_0 = N_\varepsilon + 1$.

Для наглядности визуализируем расходимость рассматриваемой последовательности.

**Sequence $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\ln(k+1)}$ disconvergence on graph**



**Задача средняя (11)**

Пользуясь критерием Коши, доказать, что последовательность

$$\frac{1}{n} + 2 \cdot (-1)^n$$

является расходящейся.

**Подсказка**

Критерий Коши не выполняется, если

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \exists n_0 > N_\varepsilon \quad \exists p_0 > 0 : \quad \left| a_{n_0+p_0} - a_{n_0} \right| \geq \varepsilon.$$

**Решение:**

Если для последовательности не выпоняется критерий Коши, по определнию это значит

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \exists n_0 > N_\varepsilon \quad \exists p_0 > 0 : \quad \left| a_{n_0+p_0} - a_{n_0} \right| \geq \varepsilon.$$

Рассмотрим модуль разности $n_0$-го и $(n_0 + p_0)$-го членов последовательности

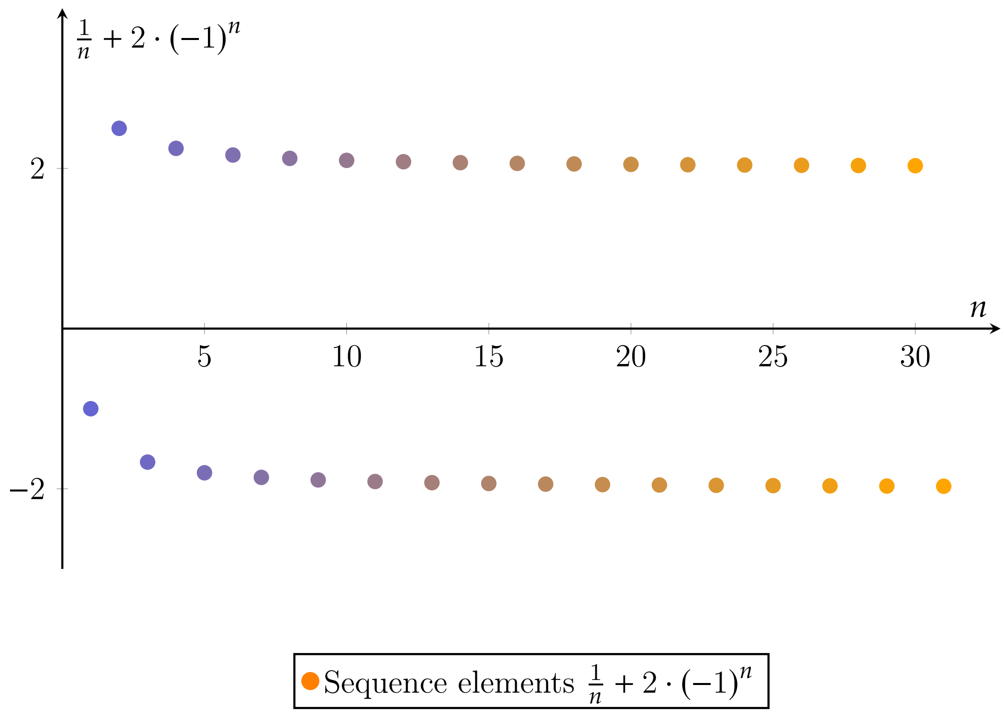
$$\left| a_{n_0+p_0} - a_{n_0} \right| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} + 2 \cdot (-1)^n - 2 \cdot (-1)^{n+p} \right| >$$

$$> \left| 2 \cdot \left( (-1)^{n_0} + (-1)^{n_0+p_0+1} \right) \right| \Bigg|_{p_0 = n_0 = 2k_0+1} = 4 \geq \varepsilon_0.$$

Таким образом, чтобы доказать, что критерий Коши не выполняется, достаточно взять $\varepsilon_0 = 4$, а в качестве $n_0$ и $p_0$ взять любое нечётное число, следующее за $N_\varepsilon$.

Для наглядности визуализируем расходимость рассматриваемой последовательности.

**Sequence $\frac{1}{n} + 2 \cdot (-1)^n$ disconvergence on graph**



**Задача простая (12)**

Пользуясь критерием сходимости монотонной последовательности доказать, что

$$a_n = \frac{3}{2k+1}$$

является сходящейся.

**Подсказка**

Покажите, что последовательность $a_n$ является убывающей и ограниченной снизу. На основании этого сделайте вывод о её сходимости.

**Решение:**

Чтобы показать сходимость $a_n$, достаточно проверить её монотонность и ограниченность. Докажем, что последовательность является убывающей, т. е. проверим выполнение неравенства

$$\frac{3}{2k+1} = a_k \geq a_{k+1} = \frac{3}{2(k+1)+1}, \ \ k \in \mathbb{N}.$$

При помощи эквивалентных преобразований, приведём данное неравенство к тождеству

$$\frac{3}{2k+1} \geq \frac{3}{2(k+1)+1},$$
$$\frac{1}{2k+1} \geq \frac{1}{2k+3},$$
$$2k+3 \geq 2k+1,$$
$$3 \geq 1.$$

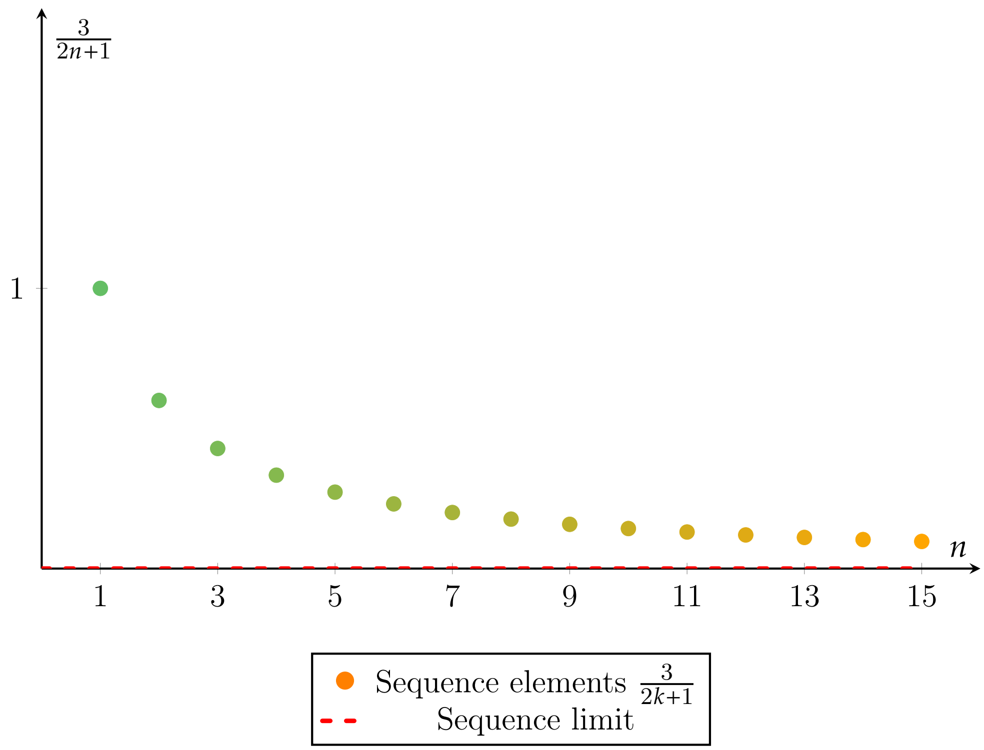
Итак, последовательность является убывающей, более того, она ограничена снизу

$$0 < \frac{3}{2n+1} = a_n.$$

Откуда, исходя из критерия сходимости монотонной последовательности, следует сходимость $a_n$.

Для наглядности визуализируем сходимость рассматриваемой последовательности.

**Sequence $\frac{3}{2n+1}$ convergence on graph**



**Задача простая (13)**

Пользуясь критерием сходимости монотонной последовательности доказать, что

$$a_n = p_0 + \frac{p_1}{10} + \ldots + \frac{p_n}{10^n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{10^k}$$

является сходящейся, если $0 \le p_n \le 9$.

**Подсказка**

Покажите, что последовательность $a_n$ является возрастающей и ограниченной сверху. Для верхней оценки воспользуйтесь формулой для суммы первых $n$ членов геометрической прогрессии.

**Решение:**

Очевидно, последовательность является монотонно возрастающей, поскольку каждое её слагаемое строго положительно. Покажем теперь, что рассматриваемая последовательность ограничена сверху

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{10^k} \le \sum_{k=0}^{n} \frac{9}{10^k} = 9 \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{10}\right)^k =$$

$$= 9 \cdot \frac{1 - \frac{1}{10^k}}{1 - \frac{1}{10}} < 9 \cdot \frac{10}{9} = 10.$$

Итак, последовательность возрастает, оставаясь меньше 10, следовательно, сходится.

**Задача простая (14)**

Пользуясь критерием сходимости монотонной последовательности доказать, что

$$a_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n+9}{2n-1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+9}{2k-1}$$

является сходящейся.

**Подсказка**

Покажите, что последовательность $a_n$ является возрастающей и ограниченной сверху. Для верхней оценки воспользуйтесь формулой для суммы первых $n$ членов геометрической прогрессии.

**Решение:**

Очевидно, все члены последовательности строго положительны, т. е. $a_n$ ограничена снизу ($0 < a_n$). Заметим также, что, начиная с члена последовательности $n_0 = 10$, каждый следующий член $a_{n+1}$ получается из предыдущего $a_n$ умножением на $\frac{n+10}{2n+1} < 1$. Таким образом, начиная с $n_0 = 10$, последовательность убывает. Убывающая, ограниченная снизу последовательность по критерию сходимости монотонной последовательности сходится.

**Задача средняя (15)**

Пользуясь критерием сходимости монотонной последовательности доказать, что

$$a_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n}$$

является сходящейся.

**Подсказка**

Используя метод математической индукции (см. «Математическая индукция»), покажите, что рассматриваемая последовательность является возрастающей и ограниченной сверху.

**Решение:**

Используя метод математической индукции (см. «Математическая индукция»), покажем, что рассматриваемая последовательность является возрастающей и ограниченной сверху. Начнём с монотонности $a_n$. База индукции выполняется в силу

$$a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} > a_1 = \sqrt{2}.$$

Принимая в качестве данного $a_k > a_{k-1}$, покажем, что $a_{k+1} > a_k$

$$a_{k+1}^2 - a_k^2 = \left(\sqrt{2+a_k}\right)^2 - \left(\sqrt{2+a_{k-1}}\right)^2 = a_k - a_{k-1} > 0.$$

Таким образом, совершив индукционный переход, возрастание $a_n$ доказано.

Покажем теперь, что $a_n$ ограничена сверху числом 2. База индукции выполняется: $a_1 = \sqrt{2} < 2$. Пусть теперь $a_k \leq 2$, тогда нетрудно совершить индукционный переход

$$a_{k+1} = \sqrt{2+a_k} < \sqrt{2+2} = 2.$$

Итак, рассматриваемая последовательность является возрастающей и ограниченной сверху, следовательно, сходящейся.

**Задача сложная (16)**

Рассмотреть последовательности

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Показать, что

1. $a_n$ монотонно возрастет и ограничена сверху,
2. $b_n$ монотонно убывает и ограничена снизу,
3. $a_n$ и $b_n$ сходятся к одному и тому же пределу $e \in \mathbb{R}$.

**Подсказка**

Для доказательства монотонности последовательностей $a_n$ и $b_n$ покажите, соответственно, что $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ и $\frac{b_n}{b_{n+1}} > 1$. При оценке данных отношений воспользуйтесь *неравенством Бернулли* (см. «Математическая индукция»)

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

где $x_i > -1$, при чём все $x_i$ — одного знака.
Для доказательства ограниченности $a_n$ и $b_n$ воспользуйтесь неравенством $a_n < b_n$.

**Решение:**

Покажем для начала, что последовательность $a_n$ возрастает. Рассмотрим отношение $(n + 1)$-го и $n$-го членов последовательности

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} =$$

$$= \left(\frac{(n+2) \cdot n}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1} =$$

$$= \left(\frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1} \geq \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) \cdot \frac{n+2}{n+1} =$$

$$= \frac{\left(n^2 + n + 1\right) \cdot (n+2)}{(n+1)^3} \geq \frac{\left(n^3 + 3n^2 + 3n + 1\right) + 1}{(n+1)^3} > 1.$$

Здесь для оценки снизу было использовано обобщённое *неравенство Бернулли* (см. «Математическая индукция»)

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

где $x_i > -1$, при чём все $x_i$ — одного знака.

Аналогично покажем убывание последовательности $b_n$. Будем рассматривать отношение $n$-го и $(n+1)$-го членов последовательности

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} =$$

$$= \left(\frac{(n+1)^2}{n\cdot(n+2)}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} = \left(1+\frac{1}{n\cdot(n+2)}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} \geq$$

$$\geq \left(1+\frac{n+1}{n\cdot(n+2)}\right) \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{\left(n^2+3n+1\right)\cdot(n+1)}{n\cdot(n+2)^2} =$$

$$= \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} > 1.$$

Для доказательства ограниченности рассматриваемых последовательностей достаточно показать, что $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n < b_n$. Действительно, при выполнении данного неравенства $a_n$ будет ограничена первым элементом $b_1$ убывающей последовательности $b_n$, а $b_n$ — ограничена первым членом $a_1$ возрастающей последовательности $a_n$

$$0 < a_1 < a_n < b_n < b_1 < 4.$$

Итак, посредством эквивалентных преобразований докажем необходимое утверждение

$$\begin{gathered} a_n < b_n \\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \\ 1 < 1+\frac{1}{n} \\ 0 < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{gathered}$$

Поскольку $a_n, \ b_n$ монотонные ограниченные последовательности, они являются сходящимися

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Осталось лишь показать, что $a_n$ и $b_n$ сходятся к одному и тому же числу, т. е. $a = b$. Рассмотрим следующий предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} = 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 1.$$

Но поскольку $a_n$, $b_n$ сходятся и $a_n > 0$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} b_n}{\lim_{n\to\infty} a_n} = \frac{b}{a} = 1 \implies e \overset{\text{def}}{=} a = b \approx 2.71828.$$

Для наглядности визуализируем сходимость данных последовательностей.

**Sequence $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ and $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ convergence on graph**