Theoremsy / Теоре́мзи

Математический анализ

Определение предела

задачи и решения

Автор:
Кулаго А. С., ММФ БГУ
andrejs.kulago@icloud.com

Обновлено:
12.07.2025

Ресурс:
https://theoremsy.com

2025, Минск

Теоретическая сводка

Дорогой читатель, обращаю Ваше внимание на то, что все задачи данного раздела особенно трудные и имеют сугубо теоретическую ценность. Если у Вас не получается разобрать данный материал — не отчаивайтесь, рассмотрите следующие разделы и возвращайтесь к этой теме позднее!

Числовой последовательностью (ЧП) называется всякая функция натурального аргумента

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ n \to f(n), \tag{1}$$

её обозначают $a_n = f(n)$. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются **элементами (членами) числовой последовательности**.

Постоянной числовой последовательностью называется последовательность $a_n = c = \text{const} \in \mathbb{R}$.

Числовая последовательность называется **ограниченной**, если выполнено

$$\exists C > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad |a_n| \le C. \tag{2}$$

Число $a \in \mathbb{R}$ называется **пределом числовой последовательности** $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge N_\varepsilon : \quad |a_n - a| < \varepsilon, \tag{3}$$

и обозначается

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \quad (a_n \to a,\ n \to \infty).$$

Если числовая последовательность имеет своим пределом ноль ($a_n \to 0,\ n \to \infty$), то говорят, что такая последовательность является **бесконечно малой (БМП)**.

Последовательность $\{b_n\} \subset \mathbb{R}$ называется **бесконечно большой (ББП)**, если выполняется

$$\forall A > 0 \quad \exists N_A \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge N_A : \quad |b_n| > A.$$

В таком случае говорят, что последовательность стремится к бесконечности, и обозначают

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty \quad (b_n \to \infty,\ n \to \infty).$$

Если существует конечный предел последовательности, то последовательность называется **сходящейся**, а в противном случае — **расходящейся**. Всякая ББП является расходящейся.

Решение задач

Задача сложная (8)

Доказать, исходя из определения предела, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

Подсказка

Для оценки общего члена последовательности воспользуйтесь неравенством $n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$.

Решение:

Докажем следующий промежуточный результат

$$n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Для этого рассмотрим факториал $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. Разобъём это длинное произведение на две части, предполагая n чётным (случай нечётного n доказывается аналогично)

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \left(\frac{n}{2} - 1\right) \cdot \underbrace{\frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2} + 1\right) \cdot \ldots \cdot n}_{\frac{n}{2}}.$$

Заменяя в правой части все слагаемые на $\frac{n}{2}$ и опуская левую часть, получим искомую оценку

$$n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Из которой нетрудными алгебраическими преобразованиями получим

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \leq \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Отсюда нетрудно найти искомое число N_ε

$$\left|\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\right| \leq \sqrt{\frac{2}{n}} < \varepsilon \implies n > \frac{2}{\varepsilon^2} \implies N_\varepsilon = \left[\frac{2}{\varepsilon^2}\right] + 1.$$