Theoremsy / Теоре́мзи

Математический анализ

Определение предела

задачи и решения

Автор:
Кулаго А. С., ММФ БГУ
andrejs.kulago@icloud.com

Обновлено:
12.07.2025

Ресурс:
https://theoremsy.com

2025, Минск

Теоретическая сводка

Дорогой читатель, обращаю Ваше внимание на то, что все задачи данного раздела особенно трудные и имеют сугубо теоретическую ценность. Если у Вас не получается разобрать данный материал — не отчаивайтесь, рассмотрите следующие разделы и возвращайтесь к этой теме позднее!

Числовой последовательностью (ЧП) называется всякая функция натурального аргумента

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ n \to f(n), \tag{1}$$

её обозначают $a_n = f(n)$. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются **элементами (членами) числовой последовательности**.

Постоянной числовой последовательностью называется последовательность $a_n = c = \text{const} \in \mathbb{R}$.

Числовая последовательность называется **ограниченной**, если выполнено

$$\exists C > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad |a_n| \le C. \tag{2}$$

Число $a \in \mathbb{R}$ называется **пределом числовой последовательности** $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge N_\varepsilon: \quad |a_n - a| < \varepsilon, \tag{3}$$

и обозначается

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \quad (a_n \to a,\ n \to \infty).$$

Если числовая последовательность имеет своим пределом ноль ($a_n \to 0,\ n \to \infty$), то говорят, что такая последовательность является **бесконечно малой (БМП)**.

Последовательность $\{b_n\} \subset \mathbb{R}$ называется **бесконечно большой (ББП)**, если выполняется

$$\forall A > 0 \quad \exists N_A \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge N_A: \quad |b_n| > A.$$

В таком случае говорят, что последовательность стремится к бесконечности, и обозначают

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty \quad (b_n \to \infty,\ n \to \infty).$$

Если существует конечный предел последовательности, то последовательность называется **сходящейся**, а в противном случае — **расходящейся**. Всякая ББП является расходящейся.

Решение задач

Задача сложная (7)

Доказать, исходя из определения предела, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \;\; a \in \mathbb{R}.$$

Подсказка

Оцените модуль общего члена последовательности сверху при помощи геометрической прогрессии со знаменателем меньше единицы.

Решение:

Пусть $k-1 \le |a| < k$ $(k \in \mathbb{N})$. Рассмотрим модуль общего члена последовательности

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} = \underbrace{\frac{|a|}{1} \cdot \frac{|a|}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{|a|}{k-1}}_{b\in\mathbb{R}} \cdot \frac{|a|}{k} \cdot \ldots \cdot \frac{|a|}{n}.$$

Обозначим произведение первых $(k-1)$ множителей b, а $(k+1)$-й множитель — $d = \frac{|a|}{k}$. Поскольку $\frac{|a|}{n} < \ldots < \frac{|a|}{k+1} < d < 1$, можем сделать следующую оценку

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right| < b \cdot d^{n-(k-1)}.$$

Итак, мы ограничили исходную последовательность геометрической прогрессией со знаменателем $d < 1$, которая сходится к нулю. Отсюда, по теореме о зажатой последовательности (теорема о двух милиционерах) следует искомый результат. Однако для чистоты доказательства укажем номер N_ε, начиная с которого члены последовательности будут попадать в ε-окрестность предельной точки,

$$b \cdot d^{n+1-k} < \varepsilon \implies n > \log_d \frac{\varepsilon}{b} + k - 1 \implies N_\varepsilon = \max\left\{k, \left[\log_d \frac{\varepsilon}{b}\right] + k\right\}.$$