Theoremsy / Теоре́мзи

Математический анализ

Определение предела

задачи и решения

Автор:
Кулаго А. С., ММФ БГУ
andrejs.kulago@icloud.com

Обновлено:
12.07.2025

Ресурс:
https://theoremsy.com

2025, Минск

Теоретическая сводка

Дорогой читатель, обращаю Ваше внимание на то, что все задачи данного раздела особенно трудные и имеют сугубо теоретическую ценность. Если у Вас не получается разобрать данный материал — не отчаивайтесь, рассмотрите следующие разделы и возвращайтесь к этой теме позднее!

Числовой последовательностью (ЧП) называется всякая функция натурального аргумента

$$f:\ \mathbb{N}\to\mathbb{R},\ n\to f(n)\,, \tag{1}$$

её обозначают $a_n = f(n)$. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются **элементами (членами) числовой последовательности**.

Постоянной числовой последовательностью называется последовательность $a_n = c = \mathrm{const}\in\mathbb{R}$.

Числовая последовательность называется **ограниченной**, если выполнено

$$\exists C>0\quad \forall n\in\mathbb{N}:\quad |a_n|\le C. \tag{2}$$

Число $a\in\mathbb{R}$ называется **пределом числовой последовательности** $\{a_n\}\subset\mathbb{R}$, если

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}\quad \forall n\ge N_\varepsilon:\quad |a_n-a|<\varepsilon, \tag{3}$$

и обозначается

$$a=\lim_{n\to\infty}a_n\quad (a_n\to a,\ n\to\infty)\,.$$

Если числовая последовательность имеет своим пределом ноль ($a_n\to 0,\ n\to\infty$), то говорят, что такая последовательность является **бесконечно малой (БМП)**.

Последовательность $\{b_n\}\subset\mathbb{R}$ называется **бесконечно большой (ББП)**, если выполняется

$$\forall A>0\quad \exists N_A\in\mathbb{N}\quad \forall n\ge N_A:\quad |b_n|>A.$$

В таком случае говорят, что последовательность стремится к бесконечности, и обозначают

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\infty\quad (b_n\to\infty,\ n\to\infty)\,.$$

Если существует конечный предел последовательности, то последовательность называется **сходящейся**, а в противном случае — **расходящейся**. Всякая ББП является расходящейся.

Решение задач

Задача сложная (6)

Докажите, исходя из определения предела, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0, \;\; a > 1.$$

Подсказка

Воспользуйтесь определенем для уже полученного предела $\frac{\log_a n}{n} \to 0, \;\; n \to \infty$.

Решение:

Воспользуемся уже ранее известным пределом $\sqrt[n]{n} \to 1, \;\; n \to \infty$. По определению это значит, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon > 0 \quad \forall n > N_\varepsilon : \quad \left|\sqrt[n]{n} - 1\right| < \varepsilon.$$

Заметим, что из $\sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon$ следует $\sqrt[n]{n} < a^{\varepsilon'}$, следует лишь взять $\varepsilon = a^{\varepsilon'} - 1 > 0$, где $a > 1, \;\; \varepsilon' > 0$. Немного преобразуем полученное неравенство

$$\sqrt[n]{n} < a^{\varepsilon} \implies n < (a^{\varepsilon})^n \implies$$
$$\implies \log_a n < \varepsilon \cdot n \implies \frac{\log_a n}{n} < \varepsilon.$$

Итак, можем записать

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon > 0 \quad \forall n > N_\varepsilon : \quad \left|\frac{\log_a n}{n}\right| < \varepsilon \iff \lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0.$$

Для наглядности визуализируем сходимость данной последовательности к 0 при $a = e$.

Sequence $\frac{\ln n}{n}$ convergence to 0 on graph