Theoremsy / Теоре́мзи

Математический анализ

Определение предела

задачи и решения

Автор:
Кулаго А. С., ММФ БГУ
andrejs.kulago@icloud.com

Обновлено:
12.07.2025

Ресурс:
https://theoremsy.com

2025, Минск

Теоретическая сводка

Дорогой читатель, обращаю Ваше внимание на то, что все задачи данного раздела особенно трудные и имеют сугубо теоретическую ценность. Если у Вас не получается разобрать данный материал — не отчаивайтесь, рассмотрите следующие разделы и возвращайтесь к этой теме позднее!

Числовой последовательностью (ЧП) называется всякая функция натурального аргумента

$$f:\ \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ n \to f(n), \tag{1}$$

её обозначают $a_n = f(n)$. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются **элементами (членами) числовой последовательности**.

Постоянной числовой последовательностью называется последовательность $a_n = c = \text{const} \in \mathbb{R}$.

Числовая последовательность называется **ограниченной**, если выполнено

$$\exists C > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad |a_n| \leq C. \tag{2}$$

Число $a \in \mathbb{R}$ называется **пределом числовой последовательности** $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_\varepsilon: \quad |a_n - a| < \varepsilon, \tag{3}$$

и обозначается

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \quad (a_n \to a,\ n \to \infty).$$

Если числовая последовательность имеет своим пределом ноль ($a_n \to 0,\ n \to \infty$), то говорят, что такая последовательность является **бесконечно малой (БМП)**.

Последовательность $\{b_n\} \subset \mathbb{R}$ называется **бесконечно большой (ББП)**, если выполняется

$$\forall A > 0 \quad \exists N_A \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_A: \quad |b_n| > A.$$

В таком случае говорят, что последовательность стремится к бесконечности, и обозначают

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty \quad (b_n \to \infty,\ n \to \infty).$$

Если существует конечный предел последовательности, то последовательность называется **сходящейся**, а в противном случае — **расходящейся**. Всякая ББП является расходящейся.

Решение задач

Задача сложная (5)

Доказать, исходя из определения предела, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Подсказка

Введите обозначение для общего члена последовательности $b_n = \sqrt[n]{n}$. А затем возведите равенство $1 + (b_n - 1) = \sqrt[n]{n}$ в n-ю степень, воспользовавшись формулой бинома Ньютона. Отбросив в разложении все слагаемые кроме третьего, получите оценку для b_n.

Решение:

Введём обозначение $b_n = \sqrt[n]{n}$. Возведём обе части равенства в n-ю степень, предварительно прибавив и отняв единицу в левой её части

$$(b_n)^n = (1 + (b_n - 1))^n = n,$$

а затем воспользуемся формулой бинома Ньютона

$$1 + n\,(b_n - 1) + \frac{(n-1)\,n}{2}\,(b_n - 1)^2 + \ldots = n.$$

Теперь, учитывая $b_n - 1 > 0$, отбросим все слагаемые в правой части равенства, получая следующую оценку

$$n > \frac{n\,(n-1)}{2}\,(b_n - 1)^2\,.$$

Немного преобразуем неравенство, вырязив b_n,

$$b_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}} + 1 < \sqrt{\frac{2}{\frac{n}{2}}} + 1 = \frac{2}{\sqrt{n}} + 1.$$

Итак, получено неравенство $0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{2}{\sqrt{n}}$, откуда

$$\left|\sqrt[n]{n} - 1\right| < \frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon,$$

т. е. в качестве искомого номера N_ε можно взять

$$N_\varepsilon = \left[\frac{4}{\varepsilon^2}\right] + 1.$$

Для наглядности визуализируем сходимость данной последовательности к 1.

Sequence $\sqrt[n]{n}$ convergence to 1 on graph