



THEOREMSY / ТЕОРЕМЗИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Определение предела

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Автор:

Кулаго А. С., ММФ БГУ
andrejs.kulago@icloud.com

Обновлено:

12.07.2025

Ресурс:

<https://theoremsy.com>

2025, Минск

Теоретическая сводка

Дорогой читатель, обращаю Ваше внимание на то, что все задачи данного раздела особенно трудные и имеют сугубо теоретическую ценность. Если у Вас не получается разобрать данный материал — не отчаивайтесь, рассмотрите следующие разделы и возвращайтесь к этой теме позднее!

Числовой последовательностью (ЧП) называется всякая функция натурального аргумента

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, n \rightarrow f(n), \quad (1)$$

её обозначают $a_n = f(n)$. Числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ называются **элементами (членами) числовой последовательности**.

Постоянной числовой последовательностью называется последовательность $a_n = c = \text{const} \in \mathbb{R}$.

Числовая последовательность называется **ограниченной**, если выполнено

$$\exists C > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq C. \quad (2)$$

Число $a \in \mathbb{R}$ называется **пределом числовой последовательности** $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon, \quad (3)$$

и обозначается

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad (a_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty).$$

Если числовая последовательность имеет своим пределом ноль ($a_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$), то говорят, что такая последовательность является **бесконечно малой (БМП)**.

Последовательность $\{b_n\} \subset \mathbb{R}$ называется **бесконечно большой (ББП)**, если выполняется

$$\forall A > 0 \quad \exists N_A \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_A : |b_n| > A.$$

В таком случае говорят, что последовательность стремится к бесконечности, и обозначают

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \quad (b_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty).$$

Если существует конечный предел последовательности, то последовательность называется **сходящейся**, а в противном случае — **расходящейся**. Всякая ББП является расходящейся.

Решение задач

Задача сложная (4)



Доказать, исходя из определения предела, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0, \quad a > 1.$$

Подсказка

Воспользуйтесь третьим членом в разложении выражения $(1 + (a - 1))^n$ при помощи формулы бинома Ньютона для оценки знаменателя общего члена последовательности.

Решение:

Сделаем следующую оценку знаменателя числовой последовательности при помощи формулы бинома Ньютона

$$a^n = (1 + (a - 1))^n = 1 + n(a - 1) + \frac{n(n - 1)}{2}(a - 1)^2 + \dots \stackrel{a > 1}{<} \frac{n(n - 1)}{2}(a - 1)^2.$$

Теперь рассмотрим модуль разности общего члена последовательности и её предела с учетом полученного соотношения

$$\left| \frac{n}{a^n} \right| < \left| \frac{2n}{n(n - 1)(a - 1)^2} \right| = \frac{2}{(n - 1)(a - 1)^2} < \varepsilon.$$

Отсюда несложно получить необходимый номер N_ε , начиная с которого модуль разности общего члена последовательности и предела становится меньше ε ,

$$N_\varepsilon = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon(a - 1)^2} \right\rceil + 1. \quad (4)$$

Для наглядности визуализируем сходимость данной последовательности к нулю при $a = 3$.

Sequence $\frac{n}{3^n}$ convergence to 0 on graph

