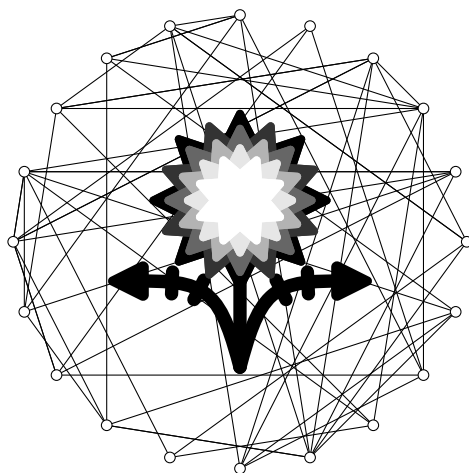




THEOREMSY / ТЕОРЕМЗИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Определение предела

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Автор:

Кулаго А. С., ММФ БГУ
andrejs.kulago@icloud.com

Обновлено:

12.07.2025

Ресурс:

<https://theoremsy.com>

2025, Минск

Теоретическая сводка

Дорогой читатель, обращаю Ваше внимание на то, что все задачи данного раздела особенно трудные и имеют сугубо теоретическую ценность. Если у Вас не получается разобрать данный материал — не отчаивайтесь, рассмотрите следующие разделы и возвращайтесь к этой теме позднее!

Числовой последовательностью (ЧП) называется всякая функция натурального аргумента

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, n \rightarrow f(n), \quad (1)$$

её обозначают $a_n = f(n)$. Числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ называются **элементами (членами) числовой последовательности**.

Постоянной числовой последовательностью называется последовательность $a_n = c = \text{const} \in \mathbb{R}$.

Числовая последовательность называется **ограниченной**, если выполнено

$$\exists C > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq C. \quad (2)$$

Число $a \in \mathbb{R}$ называется **пределом числовой последовательности** $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon, \quad (3)$$

и обозначается

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad (a_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty).$$

Если числовая последовательность имеет своим пределом ноль ($a_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$), то говорят, что такая последовательность является **бесконечно малой (БМП)**.

Последовательность $\{b_n\} \subset \mathbb{R}$ называется **бесконечно большой (ББП)**, если выполняется

$$\forall A > 0 \quad \exists N_A \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_A : |b_n| > A.$$

В таком случае говорят, что последовательность стремится к бесконечности, и обозначают

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \quad (b_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty).$$

Если существует конечный предел последовательности, то последовательность называется **сходящейся**, а в противном случае — **расходящейся**. Всякая ББП является расходящейся.

Решение задач

Задача средняя (3)



Доказать, исходя из определения предела, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{a^n} = 0, \quad b \in \mathbb{R}, \quad |a| > 1.$$

Подсказка

Для всякого $\varepsilon > 0$ определите число $N_\varepsilon = N_\varepsilon(\varepsilon)$ такое, что $\forall n > N_\varepsilon : \left| \frac{b}{a^n} \right| < \varepsilon$.

Решение:

Рассмотрим модуль разности общего члена последовательности и её предела

$$\left| \frac{b}{a^n} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Преобразуем полученное неравенство

$$\begin{aligned} |a^n| &> \frac{|b|}{\varepsilon}, \\ n \ln |a| &> \ln \frac{|b|}{\varepsilon}, \\ n &> \ln^{-1} |a| \cdot \ln \frac{|b|}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Тогда в качестве N_ε можно взять $N_\varepsilon = \left\lceil \ln^{-1} |a| \cdot \ln \frac{|b|}{\varepsilon} \right\rceil + 1$.