Theoremsy / Теоре́мзи

Математический анализ

Определение предела

задачи и решения

Автор:
Кулаго А. С., ММФ БГУ
andrejs.kulago@icloud.com

Обновлено:
12.07.2025

Ресурс:
https://theoremsy.com

2025, Минск

Теоретическая сводка

Дорогой читатель, обращаю Ваше внимание на то, что все задачи данного раздела особенно трудные и имеют сугубо теоретическую ценность. Если у Вас не получается разобрать данный материал — не отчаивайтесь, рассмотрите следующие разделы и возвращайтесь к этой теме позднее!

Числовой последовательностью (ЧП) называется всякая функция натурального аргумента

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ n \to f(n), \tag{1}$$

её обозначают $a_n = f(n)$. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются **элементами (членами) числовой последовательности**.

Постоянной числовой последовательностью называется последовательность $a_n = c = \text{const} \in \mathbb{R}$.

Числовая последовательность называется **ограниченной**, если выполнено

$$\exists C > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad |a_n| \leq C. \tag{2}$$

Число $a \in \mathbb{R}$ называется **пределом числовой последовательности** $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_\varepsilon: \quad |a_n - a| < \varepsilon, \tag{3}$$

и обозначается

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \quad (a_n \to a,\ n \to \infty).$$

Если числовая последовательность имеет своим пределом ноль ($a_n \to 0,\ n \to \infty$), то говорят, что такая последовательность является **бесконечно малой (БМП)**.

Последовательность $\{b_n\} \subset \mathbb{R}$ называется **бесконечно большой (ББП)**, если выполняется

$$\forall A > 0 \quad \exists N_A \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_A: \quad |b_n| > A.$$

В таком случае говорят, что последовательность стремится к бесконечности, и обозначают

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty \quad (b_n \to \infty,\ n \to \infty).$$

Если существует конечный предел последовательности, то последовательность называется **сходящейся**, а в противном случае — **расходящейся**. Всякая ББП является расходящейся.

Решение задач

Задача сложная (2)

Доказать, что последовательности $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ и $b_n = \frac{5\sin(3n)}{n}$, являются бесконечно малыми, т. е. что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Далее покажите, что любая последовательность $c_n = \frac{f(n)}{n}$, где c_n — ограниченная функция натурального аргумента (ограниченная последовательность), является бесконечно малой.

Подсказка

В доказательстве сходимости к нулю a_n (b_n) для всякого $\varepsilon > 0$ определите число $N_\varepsilon = N_\varepsilon(\varepsilon)$ такое, что

$$\forall n > N_\varepsilon : \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n} - 0\right| < \varepsilon \quad \left(\left|\frac{5\sin(3n)}{n} - 0\right| < \varepsilon\right).$$

При алгебраических преобразованиях воспользуйтесь оценками $\left|(-1)^{n+1}\right| = 1$ и $|5\sin(3n)| < 5$. Для доказательства $c_n \to 0,\ n \to \infty$ проведите аналогичные рассуждения, используя неравенство из определения ограниченной последовательности (**??**).

Решение:

Начнём с последовательности a_n. Рассмотрим модуль разности общего члена последовательности и её предела

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n} - 0\right| = \frac{\left|(-1)^{n+1}\right|}{|n|} = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

То есть достаточно взять

$$n > \frac{1}{\varepsilon},$$

чтобы выполнялось

$$|a_n - 0| < \varepsilon.$$

Тогда в качестве искомого числа N_ε^a можно выбрать

$$N_\varepsilon^a = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1,$$

откуда по определению следует $a_n \to 0,\ n \to \infty$.

Проведём аналогичные рассуждения для последовательности b_n, воспользовавшись известным фактом $\sin\alpha \leq 1$

$$\left|\frac{5\sin(3n)}{n} - 0\right| = 5\frac{|\sin(5n)|}{|n|} \leq \frac{5}{n} < \varepsilon.$$

Откуда следует, что в качестве искомого номера можно взять $N_\varepsilon^b = \left[\frac{5}{\varepsilon}\right] + 1$.

Рассмотрим теперь обобщённый случай $c_n = \frac{f(n)}{n}$. Поскольку $f(n)$ — ограниченная функция, можно найти такое $C \in \mathbb{R}$, что выполняется $f(n) \leq C \ \forall n \in \mathbb{N}$. Пользуясь эти фактом, оценим разность

$$\left|\frac{f(n)}{n} - 0\right| = \frac{|f(n)|}{n} \leq \frac{C}{n} \leq \varepsilon,$$

выбрав в качестве N_ε^c номер $\left[\frac{C}{\varepsilon}\right] + 1$. Итак, $c_n \to 0, \ n \to \infty$, что и требовалось доказать.