Theoremsy / Теоре́мзи

Математический анализ

Определение предела

задачи и решения

Автор:
Кулаго А. С., ММФ БГУ
andrejs.kulago@icloud.com

Обновлено:
12.07.2025

Ресурс:
https://theoremsy.com

2025, Минск

Теоретическая сводка

Дорогой читатель, обращаю Ваше внимание на то, что все задачи данного раздела особенно трудные и имеют сугубо теоретическую ценность. Если у Вас не получается разобрать данный материал — не отчаивайтесь, рассмотрите следующие разделы и возвращайтесь к этой теме позднее!

Числовой последовательностью (ЧП) называется всякая функция натурального аргумента

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ n \to f(n), \tag{1}$$

её обозначают $a_n = f(n)$. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются **элементами (членами) числовой последовательности**.

Постоянной числовой последовательностью называется последовательность $a_n = c = \mathrm{const} \in \mathbb{R}$.

Числовая последовательность называется **ограниченной**, если выполнено

$$\exists C > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad |a_n| \leq C. \tag{2}$$

Число $a \in \mathbb{R}$ называется **пределом числовой последовательности** $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_\varepsilon: \quad |a_n - a| < \varepsilon, \tag{3}$$

и обозначается

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \quad (a_n \to a,\ n \to \infty).$$

Если числовая последовательность имеет своим пределом ноль ($a_n \to 0,\ n \to \infty$), то говорят, что такая последовательность является **бесконечно малой (БМП)**.

Последовательность $\{b_n\} \subset \mathbb{R}$ называется **бесконечно большой (ББП)**, если выполняется

$$\forall A > 0 \quad \exists N_A \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_A: \quad |b_n| > A.$$

В таком случае говорят, что последовательность стремится к бесконечности, и обозначают

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty \quad (b_n \to \infty,\ n \to \infty).$$

Если существует конечный предел последовательности, то последовательность называется **сходящейся**, а в противном случае — **расходящейся**. Всякая ББП является расходящейся.

Решение задач

Задача средняя (15)

Доказать, что последовательность

$$a_n = n^{(-1)^n}$$

является неограниченной, но при этом не является ББП.

Подсказка

Рассмотрите отрицание определения ограниченной последовательности и примените его для проверки факта неограниченности рассматриваемой последовательности. Аналогично проверьте, что a_n не является ББП.

Решение:

Неограниченность по определению значит, что

$$\forall C > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad \left| n_0^{(-1)^{n_0}} \right| > C.$$

То есть необходимо найти элемент последовательности, которой будет больше по абсолютному значению любого наперёд заданного числа C. Рассмотрим модуль общего члена последовательности

$$\left| n_0^{(-1)^{n_0}} \right| = \left. \begin{cases} n_0, & n_0 = 2k \\ \frac{1}{n_0}, & n_0 = 2k+1 \end{cases} \right|_{n_0 = 2k} = n_0 > C.$$

Тогда в качестве n_0 можно взять любой нечётный номер, следующий за $[C]$. Итак, последовательность действительно является неограниченной.

Покажем теперь, что $\left| n^{(-1)^n} \right| \not\to \infty, \ n \to \infty$. По определению это значит

$$\exists A_0 > 0 \quad \forall N_A \in \mathbb{N} \quad \exists n_0 \geq N_A : \quad \left| n_0^{(-1)^{n_0}} \right| \leq A_0.$$

Снова рассмотрим модуль общего члена последовательности, но на этот раз выберем нечётные номера n_0

$$\left| n_0^{(-1)^{n_0}} \right| = \left. \begin{cases} n_0, & n_0 = 2k \\ \frac{1}{n_0}, & n_0 = 2k+1 \end{cases} \right|_{n_0 = 2k+1} = \frac{1}{n_0} \leq A_0.$$

Итак, можно взять $A_0 = 1$, а в качестве n_0 достаточно выбрать любое нечётное число, следующее за N_A. Утверждение доказано.

Для наглядности визуализируем поведение данной последовательности.

Sequence $n^{(-1)^n}$ behaviour on graph