Theoremsy / Теоре́мзи

Математический анализ

Определение предела

задачи и решения

Автор:
Кулаго А. С., ММФ БГУ
andrejs.kulago@icloud.com

Обновлено:
12.07.2025

Ресурс:
https://theoremsy.com

2025, Минск

Теоретическая сводка

Дорогой читатель, обращаю Ваше внимание на то, что все задачи данного раздела особенно трудные и имеют сугубо теоретическую ценность. Если у Вас не получается разобрать данный материал — не отчаивайтесь, рассмотрите следующие разделы и возвращайтесь к этой теме позднее!

Числовой последовательностью (ЧП) называется всякая функция натурального аргумента

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ n \to f(n), \tag{1}$$

её обозначают $a_n = f(n)$. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются **элементами (членами) числовой последовательности**.

Постоянной числовой последовательностью называется последовательность $a_n = c = \text{const} \in \mathbb{R}$.

Числовая последовательность называется **ограниченной**, если выполнено

$$\exists C > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad |a_n| \le C. \tag{2}$$

Число $a \in \mathbb{R}$ называется **пределом числовой последовательности** $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge N_\varepsilon: \quad |a_n - a| < \varepsilon, \tag{3}$$

и обозначается

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \quad (a_n \to a,\ n \to \infty).$$

Если числовая последовательность имеет своим пределом ноль ($a_n \to 0,\ n \to \infty$), то говорят, что такая последовательность является **бесконечно малой (БМП)**.

Последовательность $\{b_n\} \subset \mathbb{R}$ называется **бесконечно большой (ББП)**, если выполняется

$$\forall A > 0 \quad \exists N_A \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge N_A: \quad |b_n| > A.$$

В таком случае говорят, что последовательность стремится к бесконечности, и обозначают

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty \quad (b_n \to \infty,\ n \to \infty).$$

Если существует конечный предел последовательности, то последовательность называется **сходящейся**, а в противном случае — **расходящейся**. Всякая ББП является расходящейся.

Решение задач

Задача средняя (12)

Исходя из определения предела, доказать, что последовательность $a_n = (-1)^n$ расходится.

Подсказка

Покажите, что никакое число $a \in \mathbb{R}$ не может служить пределом последовательности a_n. Для этого рассмотрите отрицание определения предела последовательности. Рассмотрите отдельно случаи $a \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$, $a = 1$, $a = -1$.

Решение:

Чтобы доказать расходимость последовательности a_n, покажем, что никакое число $a \in \mathbb{R}$ не может служить пределом последовательности.

Запишем при помощи кванторов утверждение, что число a не является пределом последовательности $(-1)^n$

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \exists n_0 \geq N_\varepsilon : \quad \left|(-1)^{n_0} - a\right| \geq \varepsilon_0.$$

Итак, нам достаточно найти такое число ε_0, а также число n_0, зависящее от N_ε, чтобы выполнялось условие $\left|(-1)^{n_0} - a\right| \geq \varepsilon_0$. Пусть $a \neq 1$ и $a \neq -1$, тогда

$$\left|(-1)^n - a\right| \geq \left|\left|(-1)^{n_0}\right| - |a|\right| \geq |1 - |a|| \geq \varepsilon_0.$$

То есть достаточно выбрать $\varepsilon = \frac{|1-|a||}{2}$, а в качестве n_0 можно взять любое число $n_0 \geq N_\varepsilon$. Если же $a = 1$, то

$$\left|(-1)^{n_0} - 1\right| = \left.\begin{cases} 2, & n_0 = 2k+1 \\ 0, & n_0 = 2k \end{cases}\right|_{n_0 = 2k+1} = 2 \geq \varepsilon_0.$$

То есть можно взять, например, $\varepsilon_0 = 1$, а в качестве n_0 — любой нечётный номер, следующий за N_ε.

Случай $a = -1$ рассматривается аналогично. Достаточно взять $\varepsilon_0 = 1$, а n_0 — любой чётный номер, следующий за N_ε.

Для наглядности визуализируем расходимость данной последовательности.

Sequence $(-1)^n$ disconvergence on graph