Theoremsy / Теоре́мзи

Математический анализ

Определение предела

задачи и решения

Автор:
Кулаго А. С., ММФ БГУ
andrejs.kulago@icloud.com

Обновлено:
12.07.2025

Ресурс:
https://theoremsy.com

2025, Минск

Теоретическая сводка

Дорогой читатель, обращаю Ваше внимание на то, что все задачи данного раздела особенно трудные и имеют сугубо теоретическую ценность. Если у Вас не получается разобрать данный материал — не отчаивайтесь, рассмотрите следующие разделы и возвращайтесь к этой теме позднее!

Числовой последовательностью (ЧП) называется всякая функция натурального аргумента

$$f:\ \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ n \to f(n), \tag{1}$$

её обозначают $a_n = f(n)$. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются **элементами (членами) числовой последовательности**.

Постоянной числовой последовательностью называется последовательность $a_n = c = \mathrm{const} \in \mathbb{R}$.

Числовая последовательность называется **ограниченной**, если выполнено

$$\exists C > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad |a_n| \leq C. \tag{2}$$

Число $a \in \mathbb{R}$ называется **пределом числовой последовательности** $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_\varepsilon: \quad |a_n - a| < \varepsilon, \tag{3}$$

и обозначается

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \quad (a_n \to a,\ n \to \infty).$$

Если числовая последовательность имеет своим пределом ноль ($a_n \to 0,\ n \to \infty$), то говорят, что такая последовательность является **бесконечно малой (БМП)**.

Последовательность $\{b_n\} \subset \mathbb{R}$ называется **бесконечно большой (ББП)**, если выполняется

$$\forall A > 0 \quad \exists N_A \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_A: \quad |b_n| > A.$$

В таком случае говорят, что последовательность стремится к бесконечности, и обозначают

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty \quad (b_n \to \infty,\ n \to \infty).$$

Если существует конечный предел последовательности, то последовательность называется **сходящейся**, а в противном случае — **расходящейся**. Всякая ББП является расходящейся.

Решение задач

Задача средняя (11)

Доказать, исходя из определения предела, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k} = 0.$$

Подсказка

Для оценки общего члена последовательности, воспользуйтесь неравенством (см. «Математическая индукция»)

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Решение:

Оценим модуль общего члена последовательности, используя неравенство (см. «Математическая индукция»)

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Получим

$$\left|\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\right| < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} < \varepsilon.$$

Выражая в последнем неравенстве n, придём к следующему результату

$$n > \frac{1}{2\varepsilon^2} - \frac{1}{2}.$$

Тогда в качестве искомого номера N_ε разумно взять $\left[\frac{1}{2\varepsilon^2}\right]$.