Theoremsy / Теоре́мзи

Математический анализ

Определение предела

задачи и решения

Автор:
Кулаго А. С., ММФ БГУ
andrejs.kulago@icloud.com

Обновлено:
12.07.2025

Ресурс:
https://theoremsy.com

2025, Минск

Теоретическая сводка

Дорогой читатель, обращаю Ваше внимание на то, что все задачи данного раздела особенно трудные и имеют сугубо теоретическую ценность. Если у Вас не получается разобрать данный материал — не отчаивайтесь, рассмотрите следующие разделы и возвращайтесь к этой теме позднее!

Числовой последовательностью (ЧП) называется всякая функция натурального аргумента

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ n \to f(n), \tag{1}$$

её обозначают $a_n = f(n)$. Числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ называются **элементами (членами) числовой последовательности**.

Постоянной числовой последовательностью называется последовательность $a_n = c = \mathrm{const} \in \mathbb{R}$.

Числовая последовательность называется **ограниченной**, если выполнено

$$\exists C > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad |a_n| \le C. \tag{2}$$

Число $a \in \mathbb{R}$ называется **пределом числовой последовательности** $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge N_\varepsilon: \quad |a_n - a| < \varepsilon, \tag{3}$$

и обозначается

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \quad (a_n \to a,\ n \to \infty).$$

Если числовая последовательность имеет своим пределом ноль ($a_n \to 0,\ n \to \infty$), то говорят, что такая последовательность является **бесконечно малой (БМП)**.

Последовательность $\{b_n\} \subset \mathbb{R}$ называется **бесконечно большой (ББП)**, если выполняется

$$\forall A > 0 \quad \exists N_A \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge N_A: \quad |b_n| > A.$$

В таком случае говорят, что последовательность стремится к бесконечности, и обозначают

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty \quad (b_n \to \infty,\ n \to \infty).$$

Если существует конечный предел последовательности, то последовательность называется **сходящейся**, а в противном случае — **расходящейся**. Всякая ББП является расходящейся.

Решение задач

Задача средняя (10)

Доказать, исходя из определения предела, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^n + n\cdot 3^n - 4n^2}{4\cdot 5^n - n^2\cdot 2^n + \sin n} = \frac{1}{4}.$$

Подсказка

Рассотрите модуль разности общего члена последовательности и предела. При помощи свойств модуля сделайте оценку сверху полученного выражения.

Решение:

Оценим модуль разности общего члена последовательности и его предела

$$\left|\frac{5^n + n\cdot 3^n - 4n^2}{4\cdot 5^n - n^2\cdot 2^n + \sin n} - \frac{1}{4}\right| =$$

$$= \frac{1}{4}\left|\frac{4\cdot 5^n + 4n\cdot 3^n - 16n^2 - \left(4\cdot 5^n - n^2\cdot 2^n + \sin n\right)}{4\cdot 5^n - n^2\cdot 2^n + \sin n}\right| =$$

$$= \frac{1}{4}\left|\frac{4n\cdot 3^n - 16n^2 + n^2\cdot 2^n - \sin n}{4\cdot 5^n - n^2\cdot 2^n + \sin n}\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{4}\frac{|4n\cdot 3^n| + \overbrace{\left|16n^2\right|}^{<16n\cdot 3^n} + \overbrace{\left|n^2\cdot 2^n\right|}^{<n\cdot 3^n} + \overbrace{|\sin n|}^{<1<n\cdot 3^n}}{|4\cdot 5^n - n^2\cdot 2^n + \sin n|} \leq$$

$$\leq \frac{6n\cdot 3^n}{|4\cdot 5^n - n^2\cdot 2^n + \sin n|}.$$

Сделав вспомогательную оценку,

$$\left|\overbrace{4\cdot 5^n - n^2\cdot 2^n}^{>1} + \sin n\right| \geq 4\cdot 5^n - n^2\cdot 2^n - 1 \geq 5^n,$$

окончательно получим

$$0 \leq \left|\frac{5^n + n\cdot 3^n - 4n^2}{4\cdot 5^n - n^2\cdot 2^n + \sin n} - \frac{1}{4}\right| \leq 6n\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

В ранее рассмотренной задаче был найден номер N_ε (**??**) для аналогичного выражения. Подставив $a = \frac{5}{3}$ и домножив на недостающий коэффициент 6, получим

$$N_\varepsilon = \left[\frac{2\cdot 6}{\varepsilon\left(\frac{5}{3} - 1\right)^2}\right] + 1 = \left[\frac{27}{\varepsilon}\right] + 1.$$