Theoremsy / Теоре́мзи

Математический анализ

Определение предела

задачи и решения

Автор:
Кулаго А. С., ММФ БГУ
andrejs.kulago@icloud.com

Обновлено:
12.07.2025

Ресурс:
https://theoremsy.com

2025, Минск

Теоретическая сводка

Дорогой читатель, обращаю Ваше внимание на то, что все задачи данного раздела особенно трудные и имеют сугубо теоретическую ценность. Если у Вас не получается разобрать данный материал — не отчаивайтесь, рассмотрите следующие разделы и возвращайтесь к этой теме позднее!

Числовой последовательностью (ЧП) называется всякая функция натурального аргумента

$$f:\ \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ n \to f(n), \tag{1}$$

её обозначают $a_n = f(n)$. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются **элементами (членами) числовой последовательности**.

Постоянной числовой последовательностью называется последовательность $a_n = c = \text{const} \in \mathbb{R}$.

Числовая последовательность называется **ограниченной**, если выполнено

$$\exists C > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad |a_n| \le C. \tag{2}$$

Число $a \in \mathbb{R}$ называется **пределом числовой последовательности** $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge N_\varepsilon: \quad |a_n - a| < \varepsilon, \tag{3}$$

и обозначается

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \quad (a_n \to a,\ n \to \infty).$$

Если числовая последовательность имеет своим пределом ноль ($a_n \to 0,\ n \to \infty$), то говорят, что такая последовательность является **бесконечно малой (БМП)**.

Последовательность $\{b_n\} \subset \mathbb{R}$ называется **бесконечно большой (ББП)**, если выполняется

$$\forall A > 0 \quad \exists N_A \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge N_A: \quad |b_n| > A.$$

В таком случае говорят, что последовательность стремится к бесконечности, и обозначают

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty \quad (b_n \to \infty,\ n \to \infty).$$

Если существует конечный предел последовательности, то последовательность называется **сходящейся**, а в противном случае — **расходящейся**. Всякая ББП является расходящейся.

Решение задач

Задача средняя (1)

Доказать, исходя из определения предела, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1.$$

Подсказка

Для всякого $\varepsilon > 0$ определите число $N_\varepsilon = N_\varepsilon(\varepsilon)$ такое, что $\forall n > N_\varepsilon :\ \left|\frac{n}{n+2} - 1\right| < \varepsilon.$

Решение:

Рассмотрим модуль разности числовой последовательности и её предела

$$\left|\frac{n}{n+2} - 1\right| = \left|\frac{-2}{n+2}\right| = \frac{2}{n+2} < \varepsilon.$$

Откуда получим, что

$$\left|\frac{n}{n+2} - 1\right| < \varepsilon,$$

если выполнено

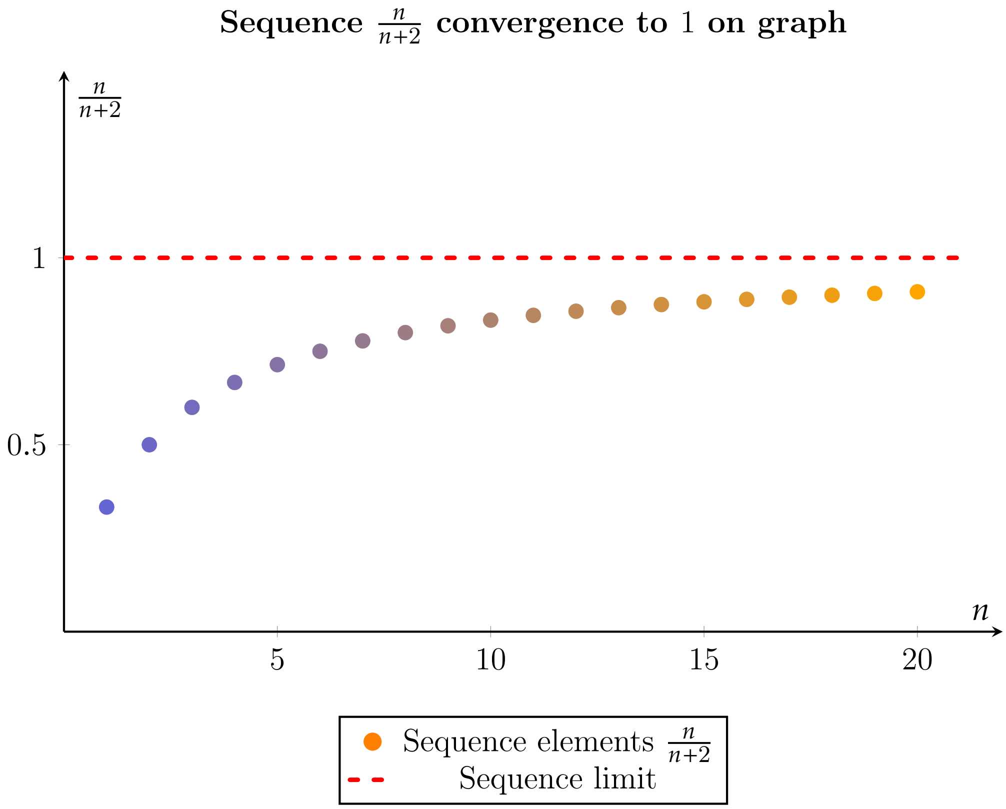
$$n > \frac{2}{\varepsilon} - 2.$$

Тогда в качестве искомого числа N_ε можно выбрать

$$N_\varepsilon = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right],$$

что по определению значит $\frac{n}{n+2} \to 1,\ n \to \infty.$

Для наглядности визуализируем сходимость рассматриваемой последовательности к 1.


Sequence $\frac{n}{n+2}$ convergence to 1 on graph
$\frac{n}{n+2}$
1
0.5
n
5
10
15
20
Sequence elements $\frac{n}{n+2}$
Sequence limit

Задача сложная (2)

Доказать, что последовательности $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ и $b_n = \frac{5\sin(3n)}{n}$, являются бесконечно малыми, т. е. что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Далее покажите, что любая последовательность $c_n = \frac{f(n)}{n}$, где c_n — ограниченная функция натурального аргумента (ограниченная последовательность), является бесконечно малой.

Подсказка

В доказательстве сходимости к нулю a_n (b_n) для всякого $\varepsilon > 0$ определите число $N_\varepsilon = N_\varepsilon(\varepsilon)$ такое, что

$$\forall n > N_\varepsilon : \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n} - 0\right| < \varepsilon \quad \left(\left|\frac{5\sin(3n)}{n} - 0\right| < \varepsilon\right).$$

При алгебраических преобразованиях воспользуйтесь оценками $\left|(-1)^{n+1}\right| = 1$ и $|5\sin(3n)| < 5$. Для доказательства $c_n \to 0,\ n \to \infty$ проведите аналогичные рассуждения, используя неравенство из определения ограниченной последовательности (**??**).

Решение:

Начнём с последовательности a_n. Рассмотрим модуль разности общего члена последовательности и её предела

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n} - 0\right| = \frac{\left|(-1)^{n+1}\right|}{|n|} = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

То есть достаточно взять

$$n > \frac{1}{\varepsilon},$$

чтобы выполнялось

$$|a_n - 0| < \varepsilon.$$

Тогда в качестве искомого числа N_ε^a можно выбрать

$$N_\varepsilon^a = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1,$$

откуда по определению следует $a_n \to 0,\ n \to \infty$.

Проведём аналогичные рассуждения для последовательности b_n, воспользовавшись известным фактом $\sin\alpha \le 1$

$$\left|\frac{5\sin(3n)}{n} - 0\right| = 5\frac{|\sin(5n)|}{|n|} \le \frac{5}{n} < \varepsilon.$$

Откуда следует, что в качестве искомого номера можно взять $N_\varepsilon^b = \left[\frac{5}{\varepsilon}\right] + 1$.

Рассмотрим теперь обобщённый случай $c_n = \frac{f(n)}{n}$. Поскольку $f(n)$ — ограниченная функция, можно найти такое $C \in \mathbb{R}$, что выполняется $f(n) \leq C$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Пользуясь эти фактом, оценим разность

$$\left|\frac{f(n)}{n} - 0\right| = \frac{|f(n)|}{n} \leq \frac{C}{n} \leq \varepsilon,$$

выбрав в качестве N_ε^c номер $\left[\frac{C}{\varepsilon}\right] + 1$. Итак, $c_n \to 0,\ n \to \infty$, что и требовалось доказать.

Задача средняя (3)

Доказать, исходя из определения предела, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b}{a^n} = 0,\ b \in \mathbb{R},\ |a| > 1.$$

Подсказка

Для всякого $\varepsilon > 0$ определите число $N_\varepsilon = N_\varepsilon(\varepsilon)$ такое, что $\forall n > N_\varepsilon : \left|\frac{b}{a^n}\right| < \varepsilon$.

Решение:

Рассмотрим модуль разности общего члена последовательности и её предела

$$\left|\frac{b}{a^n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Преобразуем полученное неравенство

$$|a^n| > \frac{|b|}{\varepsilon},$$
$$n \ln|a| > \ln\frac{|b|}{\varepsilon},$$
$$n > \ln^{-1}|a| \cdot \ln\frac{|b|}{\varepsilon}.$$

Тогда в качестве N_ε можно взять $N_\varepsilon = \left[\ln^{-1}|a| \cdot \ln\frac{|b|}{\varepsilon}\right] + 1$.

Задача сложная (4)

Доказать, исходя из определения предела, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0, \ \ a > 1.$$

Подсказка

Воспользуйтесь третьим членом в разложении выражения $(1 + (a-1))^n$ при помощи формулы бинома Ньютона для оценки знаменателя общего члена последовательности.

Решение:

Сделаем следующую оценку знаменателя числовой последовательности при помощи формулы бинома Ньютона

$$a^n = (1 + (a-1))^n = 1 + n\,(a-1) + \frac{n\,(n-1)}{2}\,(a-1)^2 + \ldots \overset{a>1}{<} \frac{n\,(n-1)}{2}\,(a-1)^2 .$$

Теперь рассмотрим модуль разности общего члена последовательности и её предела с учетом полученного соотношения

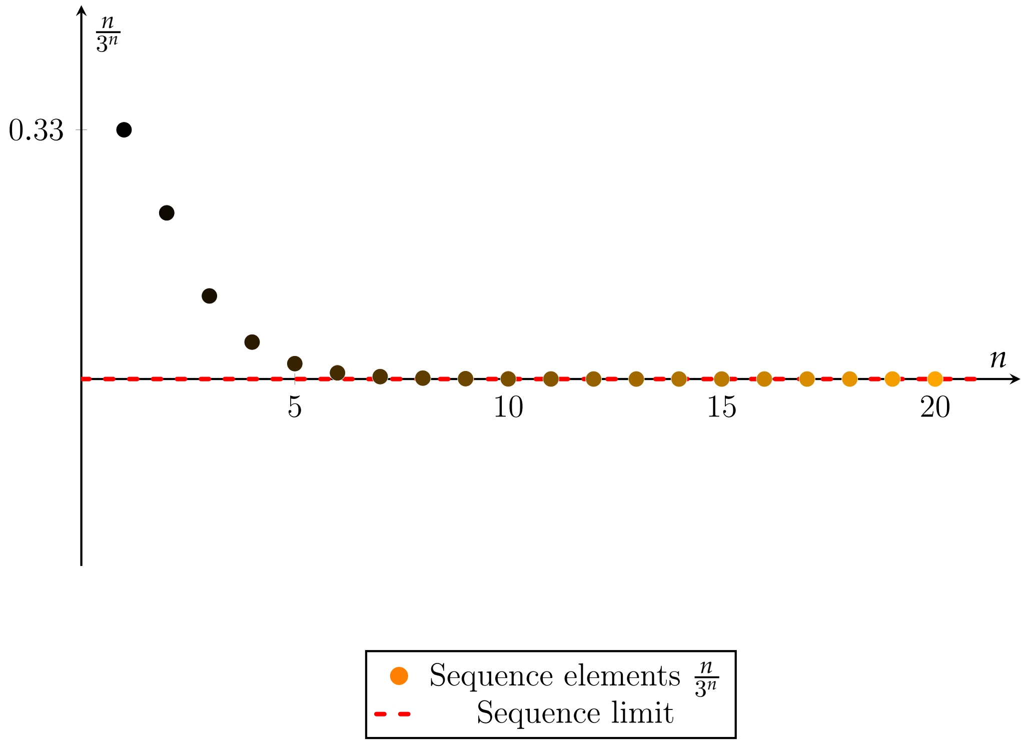
$$\left|\frac{n}{a^n}\right| < \left|\frac{2n}{n\,(n-1)\,(a-1)^2}\right| = \frac{2}{(n-1)\,(a-1)^2} < \varepsilon.$$

Отсюда несложно получить необходимый номер N_ε, начиная с которого модуль разности общего члена последовательности и предела становится меньше ε,

$$N_\varepsilon = \left[\frac{2}{\varepsilon\,(a-1)^2}\right] + 1. \tag{4}$$

Для наглядности визуализируем сходимость данной последовательности к нулю при $a = 3$.

Sequence $\frac{n}{3^n}$ convergence to 0 on graph



Задача сложная (5)

Доказать, исходя из определения предела, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Подсказка

Введите обозначение для общего члена последовательности $b_n = \sqrt[n]{n}$. А затем возведите равенство $1 + (b_n - 1) = \sqrt[n]{n}$ в n-ю степень, воспользовавшись формулой бинома Ньютона. Отбросив в разложении все слагаемые кроме третьего, получите оценку для b_n.

Решение:

Введём обозначение $b_n = \sqrt[n]{n}$. Возведём обе части равенства в n-ю степень, предварительно прибавив и отняв единицу в левой её части

$$(b_n)^n = (1 + (b_n - 1))^n = n,$$

а затем воспользуемся формулой бинома Ньютона

$$1 + n\,(b_n - 1) + \frac{(n-1)\,n}{2}\,(b_n - 1)^2 + \ldots = n.$$

Теперь, учитывая $b_n - 1 > 0$, отбросим все слагаемые в правой части равенства, получая следующую оценку

$$n > \frac{n\,(n-1)}{2}\,(b_n - 1)^2\,.$$

Немного преобразуем неравенство, выразив b_n,

$$b_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}} + 1 < \sqrt{\frac{2}{\frac{n}{2}}} + 1 = \frac{2}{\sqrt{n}} + 1.$$

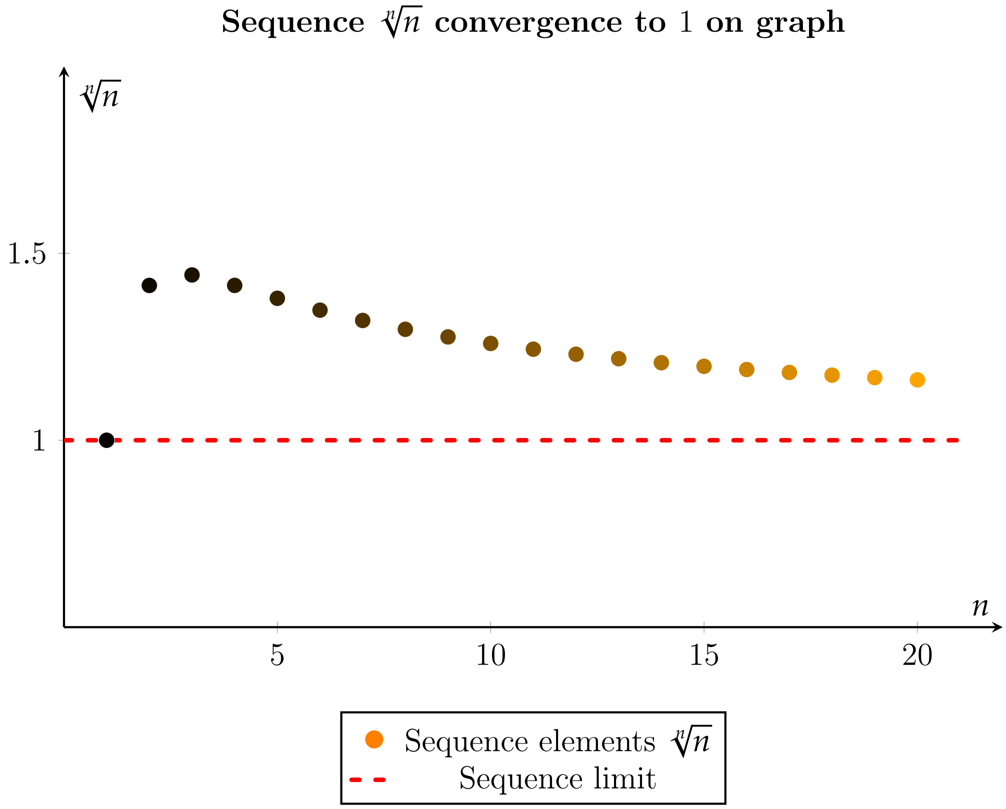
Итак, получено неравенство $0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{2}{\sqrt{n}}$, откуда

$$\left|\sqrt[n]{n} - 1\right| < \frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon,$$

т. е. в качестве искомого номера N_ε можно взять

$$N_\varepsilon = \left[\frac{4}{\varepsilon^2}\right] + 1.$$

Для наглядности визуализируем сходимость данной последовательности к 1.


Sequence $\sqrt[n]{n}$ convergence to 1 on graph
$\sqrt[n]{n}$
1.5
1
n
5
10
15
20
Sequence elements $\sqrt[n]{n}$
Sequence limit

Задача сложная (6)

Докажите, исходя из определения предела, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0, \ a > 1.$$

Подсказка

Воспользуйтесь определенем для уже полученного предела $\frac{\log_a n}{n} \to 0, \ n \to \infty$.

Решение:

Воспользуемся уже ранее известным пределом $\sqrt[n]{n} \to 1, \ n \to \infty$. По определению это значит, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon > 0 \quad \forall n > N_\varepsilon : \quad \left|\sqrt[n]{n} - 1\right| < \varepsilon.$$

Заметим, что из $\sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon$ следует $\sqrt[n]{n} < a^{\varepsilon'}$, следует лишь взять $\varepsilon = a^{\varepsilon'} - 1 > 0$, где $a > 1, \ \varepsilon' > 0$. Немного преобразуем полученное неравенство

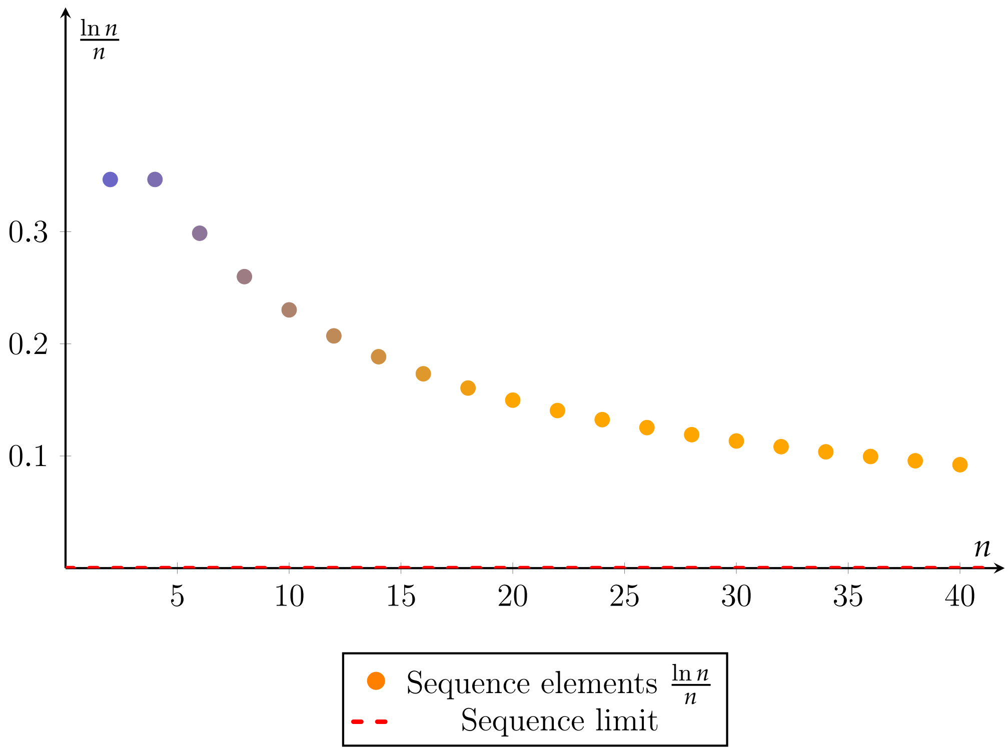
$$\sqrt[n]{n} < a^\varepsilon \implies n < (a^\varepsilon)^n \implies$$
$$\implies \log_a n < \varepsilon \cdot n \implies \frac{\log_a n}{n} < \varepsilon.$$

Итак, можем записать

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon > 0 \quad \forall n > N_\varepsilon : \quad \left|\frac{\log_a n}{n}\right| < \varepsilon \iff \lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0.$$

Для наглядности визуализируем сходимость данной последовательности к 0 при $a = e$.

Sequence $\frac{\ln n}{n}$ convergence to 0 on graph



Задача сложная (7)

Доказать, исходя из определения предела, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0,\ \ a \in \mathbb{R}.$$

Подсказка

Оцените модуль общего члена последовательности сверху при помощи геометрической прогрессии со знаменателем меньше единицы.

Решение:

Пусть $k-1 \leq |a| < k$ $(k \in \mathbb{N})$. Рассмотрим модуль общего члена последовательности

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} = \underbrace{\frac{|a|}{1} \cdot \frac{|a|}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{|a|}{k-1}}_{b\in\mathbb{R}} \cdot \frac{|a|}{k} \cdot \ldots \cdot \frac{|a|}{n}.$$

Обозначим произведение первых $(k-1)$ множителей b, а $(k+1)$-й множитель — $d = \frac{|a|}{k}$. Поскольку $\frac{|a|}{n} < \ldots < \frac{|a|}{k+1} < d < 1$, можем сделать следующую оценку

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right| < b \cdot d^{n-(k-1)}.$$

Итак, мы ограничили исходную последовательность геометрической прогрессией со знаменателем $d < 1$, которая сходится к нулю. Отсюда, по теореме о зажатой последовательности (теорема о двух милицонерах) следует искомый результат. Однако для чистоты доказательства укажем номер N_ε, начиная с которого члены последовательности будут попадать в ε-окрестность предельной точки,

$$b \cdot d^{n+1-k} < \varepsilon \implies n > \log_d \frac{\varepsilon}{b} + k - 1 \implies N_\varepsilon = \max\left\{k, \left[\log_d \frac{\varepsilon}{b}\right] + k\right\}.$$

Задача сложная (8)

Доказать, исходя из определения предела, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

Подсказка

Для оценки общего члена последовательности воспользуйтесь неравенством $n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$.

Решение:

Докажем следующий промежуточный результат

$$n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Для этого рассмотрим факториал $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. Разобъём это длинное произведение на две части, предполагая n чётным (случай нечётного n доказывается аналогично)

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \left(\frac{n}{2} - 1\right) \cdot \underbrace{\frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2} + 1\right) \cdot \ldots \cdot n}_{\frac{n}{2}}.$$

Заменяя в правой части все слагаемые на $\frac{n}{2}$ и опуская левую часть, получим искомую оценку

$$n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Из которой нетрудными алгебраическими преобразованиями получим

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \leq \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Отсюда нетрудно найти искомое число N_ε

$$\left|\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\right| \leq \sqrt{\frac{2}{n}} < \varepsilon \implies n > \frac{2}{\varepsilon^2} \implies N_\varepsilon = \left[\frac{2}{\varepsilon^2}\right] + 1.$$

Задача средняя (9)

Доказать, исходя из определения предела, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Подсказка

Оцените общий член последовательности сверху, расписав $n!$ и n^n в виде произведения и отбросив лишние члены.

Решение:

Оценим сверху общий член данной последовательности

$$\left|\frac{n!}{n^n}\right| = \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\frac{2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n}}_{<1} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Тогда в качестве N_ε естественно выбрать $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

Задача средняя (10)

Доказать, исходя из определения предела, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n+n\cdot 3^n-4n^2}{4\cdot 5^n-n^2\cdot 2^n+\sin n}=\frac{1}{4}.$$

Подсказка

Рассотрите модуль разности общего члена последовательности и предела. При помощи свойств модуля сделайте оценку сверху полученного выражения.

Решение:

Оценим модуль разности общего члена последовательности и его предела

$$\left|\frac{5^n+n\cdot 3^n-4n^2}{4\cdot 5^n-n^2\cdot 2^n+\sin n}-\frac{1}{4}\right|=$$

$$=\frac{1}{4}\left|\frac{4\cdot 5^n+4n\cdot 3^n-16n^2-\left(4\cdot 5^n-n^2\cdot 2^n+\sin n\right)}{4\cdot 5^n-n^2\cdot 2^n+\sin n}\right|=$$

$$=\frac{1}{4}\left|\frac{4n\cdot 3^n-16n^2+n^2\cdot 2^n-\sin n}{4\cdot 5^n-n^2\cdot 2^n+\sin n}\right|\leq$$

$$\leq\frac{1}{4}\frac{|4n\cdot 3^n|+\overbrace{\left|16n^2\right|}^{<16n\cdot 3^n}+\overbrace{\left|n^2\cdot 2^n\right|}^{<n\cdot 3^n}+\overbrace{|\sin n|}^{<1<n\cdot 3^n}}{|4\cdot 5^n-n^2\cdot 2^n+\sin n|}\leq$$

$$\leq\frac{6n\cdot 3^n}{|4\cdot 5^n-n^2\cdot 2^n+\sin n|}.$$

Сделав вспомогательную оценку,

$$\left|\overbrace{4\cdot 5^n-n^2\cdot 2^n}^{>1}+\sin n\right|\geq 4\cdot 5^n-n^2\cdot 2^n-1\geq 5^n,$$

окончательно получим

$$0\leq\left|\frac{5^n+n\cdot 3^n-4n^2}{4\cdot 5^n-n^2\cdot 2^n+\sin n}-\frac{1}{4}\right|\leq 6n\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

В ранее рассмотренной задаче был найден номер N_ε (**??**) для аналогичного выражения. Подставив $a=\frac{5}{3}$ и домножив на недостающий коэффициент 6, получим

$$N_\varepsilon=\left[\frac{2\cdot 6}{\varepsilon\left(\frac{5}{3}-1\right)^2}\right]+1=\left[\frac{27}{\varepsilon}\right]+1.$$

Задача средняя (11)

Доказать, исходя из определения предела, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k} = 0.$$

Подсказка

Для оценки общего члена последовательности, воспользуйтесь неравенством (см. «Математическая индукция»)

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Решение:

Оценим модуль общего члена последовательности, используя неравенство (см. «Математическая индукция»)

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Получим

$$\left|\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\right| < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} < \varepsilon.$$

Выражая в последнем неравенстве n, придём к следующему результату

$$n > \frac{1}{2\varepsilon^2} - \frac{1}{2}.$$

Тогда в качестве искомого номера N_ε разумно взять $\left[\frac{1}{2\varepsilon^2}\right]$.

Задача средняя (12)

Исходя из определения предела, доказать, что последовательность $a_n = (-1)^n$ расходится.

Подсказка

Покажите, что никакое число $a \in \mathbb{R}$ не может служить пределом последовательности a_n. Для этого рассмотрите отрицание определения предела последовательности. Рассмотрите отдельно случаи $a \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$, $a = 1$, $a = -1$.

Решение:

Чтобы доказать расходимость последовательности a_n, покажем, что никакое число $a \in \mathbb{R}$ не может служить пределом последовательности.

Запишем при помощи кванторов утверждение, что число a не является пределом последовательности $(-1)^n$

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \exists n_0 \geq N_\varepsilon : \quad \left|(-1)^{n_0} - a\right| \geq \varepsilon_0.$$

Итак, нам достаточно найти такое число ε_0, а также число n_0, зависящее от N_ε, чтобы выполнялось условие $\left|(-1)^{n_0} - a\right| \geq \varepsilon_0$. Пусть $a \neq 1$ и $a \neq -1$, тогда

$$\left|(-1)^n - a\right| \geq \left|\left|(-1)^{n_0}\right| - |a|\right| \geq |1 - |a|| \geq \varepsilon_0.$$

То есть достаточно выбрать $\varepsilon = \frac{|1-|a||}{2}$, а в качестве n_0 можно взять любое число $n_0 \geq N_\varepsilon$.

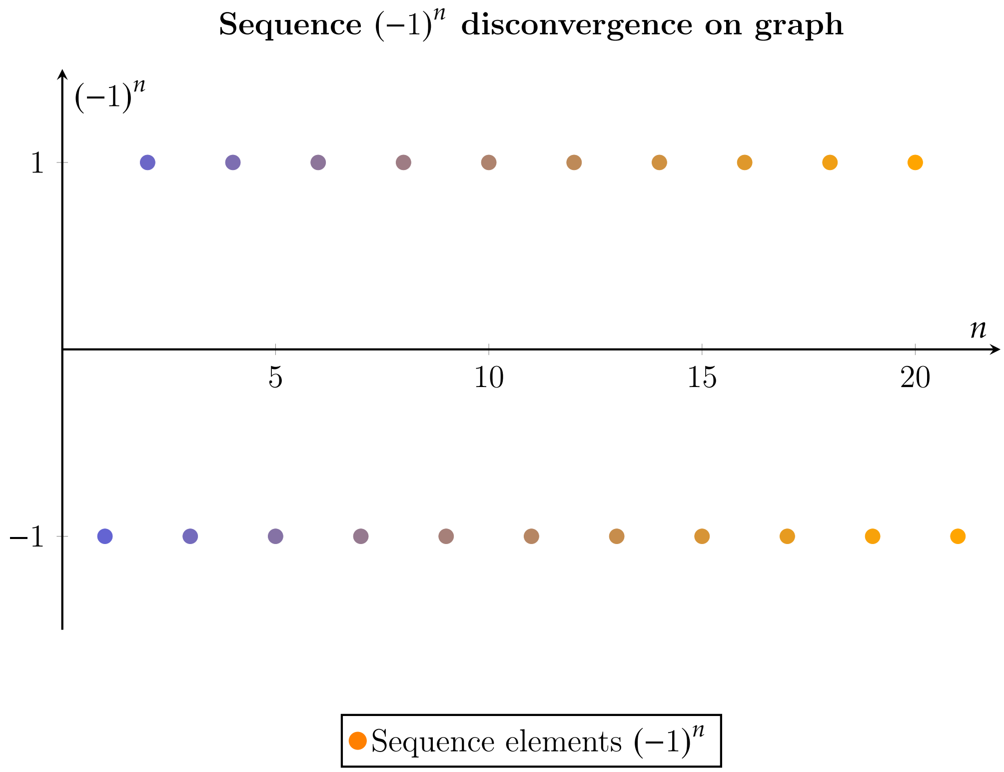
Если же $a = 1$, то

$$\left|(-1)^{n_0} - 1\right| = \left.\begin{cases} 2, & n_0 = 2k+1 \\ 0, & n_0 = 2k \end{cases}\right|_{n_0 = 2k+1} = 2 \geq \varepsilon_0.$$

То есть можно взять, например, $\varepsilon_0 = 1$, а в качестве n_0 — любой нечётный номер, следующий за N_ε.

Случай $a = -1$ рассматривается аналогично. Достаточно взять $\varepsilon_0 = 1$, а n_0 — любой чётный номер, следующий за N_ε.

Для наглядности визуализируем расходимость данной последовательности.


Sequence $(-1)^n$ disconvergence on graph
$(-1)^n$
1
-1
n
5
10
15
20
Sequence elements $(-1)^n$

Задача средняя (13)

Исходя из определения, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \sqrt{n} = \infty.$$

Подсказка

Для всякого $A > 0$ определите число $N_A = N_A(A)$ такое, что $\left|(-1)^n \cdot n\right| > A$.

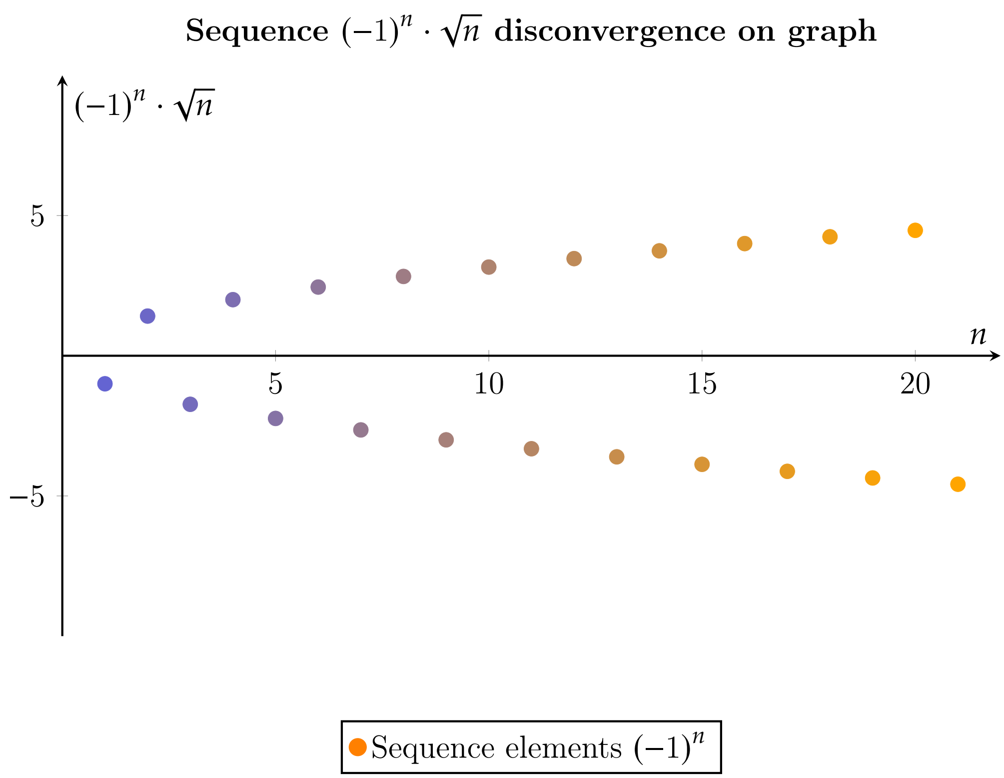
Решение:

Рассмотрим модуль общего члена последовательности

$$\left|(-1)^n \cdot \sqrt{n}\right| = \left|(-1)^n\right| \cdot \left|\sqrt{n}\right| = \sqrt{n} > A \implies n^2 > A.$$

Таким образом в качестве искомого номера N_A можно взять $N_A = \left[A^2\right] + 1$, что по определению значит $(-1)^n \cdot \sqrt{n} \to \infty,\ n \to \infty$.

Для наглядности визуализируем расходимость данной последовательности.



Задача средняя (14)

Исходя из определения, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \ln\ln n = \infty, \;\; n > 2.$$

Подсказка

Для всякого $A > 0$ определите число $N_A = N_A(A)$ такое, что $|\ln\ln n| > A$.

Решение:

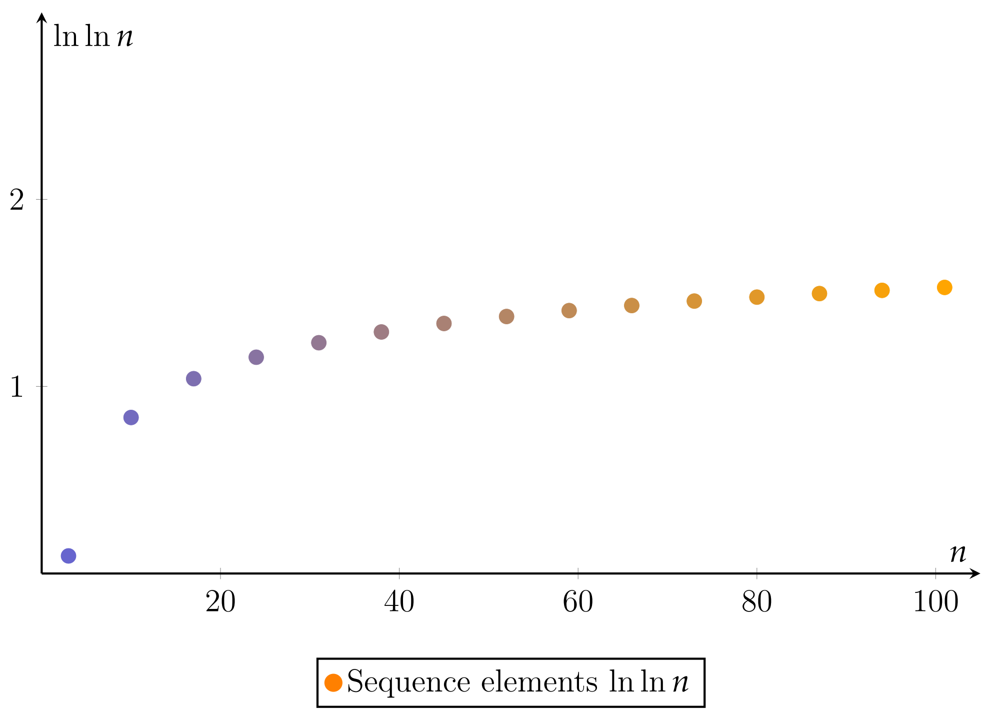
Рассмотрим модуль общего члена последовательности, начиная с $n = 3$ (чтобы избежать отрицательные члены последовательности),

$$|\ln\ln n| = \ln\ln n > A \implies \ln n > e^A \implies n > e^{e^A}.$$

Таким образом в качестве искомого номера N_A можно взять $N_A = \max\left\{\left[e^{e^A}\right] + 1, 3\right\}$, что по определению значит $\ln\ln n \to \infty, \;\; n \to \infty$.

Для наглядности визуализируем расходимость данной последовательности.

Sequence $\ln\ln n$ disconvergence on graph



Задача средняя (15)

Доказать, что последовательность

$$a_n = n^{(-1)^n}$$

является неограниченной, но при этом не является ББП.

Подсказка

Рассмотрите отрицание определения ограниченной последовательности и примените его для проверки факта неограниченности рассматриваемой последовательности. Аналогично проверьте, что a_n не является ББП.

Решение:

Неограниченность по определению значит, что

$$\forall C > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad \left| n_0^{(-1)^{n_0}} \right| > C.$$

То есть необходимо найти элемент последовательности, которой будет больше по абсолютному значению любого наперёд заданного числа C. Рассмотрим модуль общего члена последовательности

$$\left| n_0^{(-1)^{n_0}} \right| = \left. \begin{cases} n_0, & n_0 = 2k \\ \frac{1}{n_0}, & n_0 = 2k+1 \end{cases} \right|_{n_0=2k} = n_0 > C.$$

Тогда в качестве n_0 можно взять любой нечётный номер, следующий за $[C]$. Итак, последовательность действительно является неограниченной.

Покажем теперь, что $\left| n^{(-1)^n} \right| \not\to \infty, \ n \to \infty$. По определению это значит

$$\exists A_0 > 0 \quad \forall N_A \in \mathbb{N} \quad \exists n_0 \geq N_A : \quad \left| n_0^{(-1)^{n_0}} \right| \leq A_0.$$

Снова рассмотрим модуль общего члена последовательности, но на этот раз выберем нечётные номера n_0

$$\left| n_0^{(-1)^{n_0}} \right| = \left. \begin{cases} n_0, & n_0 = 2k \\ \frac{1}{n_0}, & n_0 = 2k+1 \end{cases} \right|_{n_0=2k+1} = \frac{1}{n_0} \leq A_0.$$

Итак, можно взять $A_0 = 1$, а в качестве n_0 достаточно выбрать любое нечётное число, следующее за N_A. Утверждение доказано.

Для наглядности визуализируем поведение данной последовательности.

Sequence $n^{(-1)^n}$ behaviour on graph