



THEOREMSY / ТЕОРЕМЗИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Техника вычисления пределов

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Автор:

Кулаго А. С., ММФ БГУ
andrejs.kulago@icloud.com

Обновлено:

07.07.2025

Ресурс:

<https://theoremsy.com>

2025, Минск

Теоретическая сводка

Если $a_n \rightarrow a$, $n \rightarrow \infty$ и $b_n \rightarrow b$, $n \rightarrow \infty$, то

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$,
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (k \cdot b_n) = k \cdot a$, $k \in \mathbb{R}$,
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ ($b \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N} : b_n \neq 0$).

Если c_n — ограниченная последовательность и $d_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n \cdot d_n = 0.$$

Некоторые пределы, найденные по определению,

- | | |
|--|--|
| 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$, $\alpha > 0$, | 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} = 1$, $k > 0$, |
| 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$, $ a < 1$, | 7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, |
| 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\beta}{b^n}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $ b > 1$, | 8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$, |
| 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log_d n)^\gamma}{n^\delta}$, $d > 1$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, | 9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l^n}{n!} = 0$, $l \in \mathbb{R}$ |
| 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, | 10) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$. |

Решение задач

Задача простая (9)



Вычислить предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2}{n^3}.$$

Подсказка

Воспользуйтесь формулой

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Решение:

Воспользуемся известной формулой (см. «Математическая индукция»)

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\left(2 + \frac{1}{n}\right)}_{\rightarrow 2} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Для наглядности визуализируем полученный результат.

Sequence $\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2}{n^3}\right)$ convergence to $\frac{1}{3}$ on graph

