Theoremsy / Теоре́мзи

Математический анализ

Техника вычисления пределов

задачи и решения

Автор:
Кулаго А. С., ММФ БГУ
andrejs.kulago@icloud.com

Обновлено:
07.07.2025

Ресурс:
https://theoremsy.com

2025, Минск

Теоретическая сводка

Если $a_n \to a,\ n \to \infty$ и $b_n \to b,\ n \to \infty$, то

$$1)\ \lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b,$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b,$$

$$3)\ \lim_{n\to\infty}(k \cdot b_n) = k \cdot a,\ k \in \mathbb{R},$$

$$4)\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}:\ b_n \neq 0).$$

Если c_n — ограниченная последовательность и $d_n \to 0,\ n \to \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} c_n \cdot d_n = 0.$$

Некоторые пределы, найденные по определению,

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha} = 0,\ \alpha > 0,$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty} a^n = 0,\ |a| < 1,$$

$$3)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^\beta}{b^n},\ \beta \in \mathbb{R},\ |b| > 1,$$

$$4)\ \lim_{n\to\infty}\frac{(\log_d n)^\gamma}{n^\delta},\ d > 1,\ \gamma \in \mathbb{R},\ \delta > 0,$$

$$5)\ \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

$$6)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{k} = 1,\ k > 0,$$

$$7)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1,$$

$$8)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0,$$

$$9)\ \lim_{n\to\infty}\frac{l^n}{n!} = 0,\ l \in \mathbb{R}$$

$$10)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0.$$

Решение задач

Задача средняя (8)

Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}\cdot n}{n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\cdot k}{n}\right|.$$

Подсказка

Рассмотрите знаменатель общего члена последовательности отдельно для n чётного и n нечётного. Покажите, что в обоих случаях пределы подпоследовательностей совпадают. Пользуясь теоремой о двух милиционерах, сделайте вывод о сходимости последовательности.

Решение:

Рассмотрим числитель общего члена последовательности для n чётного

$$1-2+3-\ldots-n=(1-2)+(3-4)+\ldots+(n-1-n)=-\frac{n}{2}$$

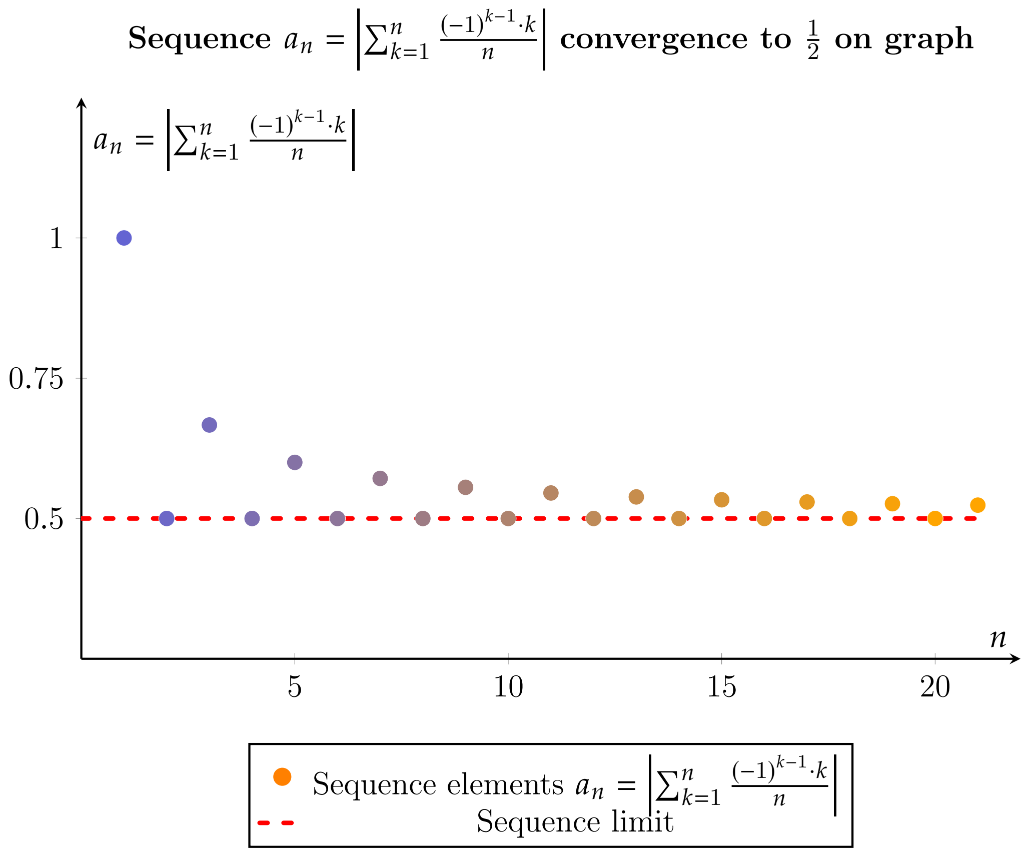
и для n нечётного

$$1-2+3-\ldots+n=(1-2)+\ldots+(n-2-(n-1))+n=-\frac{n-1}{2}+n.$$

Тогда общий член последовательности (обозначим его a_n) лежит на между

$$\frac{1}{2}=\left|\frac{-\frac{n}{2}}{n}\right|\leq a_n\leq\left|\frac{-\frac{n-1}{2}+n}{n}\right|=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}.$$

Поскольку $\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\to\infty,\ n\to\infty$, по теореме о зажатой последовательности (теорема о двух милиционерах) $a_n\to\frac{1}{2},\ n\to\infty$. Для наглядности визуализируем полученный результат.


Sequence $a_n = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} \cdot k}{n}\right|$ convergence to $\frac{1}{2}$ on graph
$a_n = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} \cdot k}{n}\right|$
1
0.75
0.5
n
5
10
15
20
Sequence elements $a_n = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} \cdot k}{n}\right|$
Sequence limit