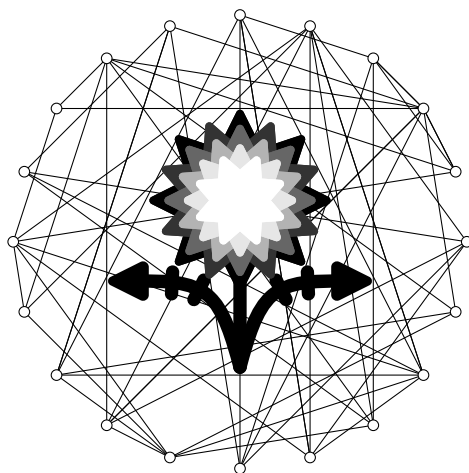




---

THEOREMSY / ТЕОРЕМЗИ

---

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

---

# Техника вычисления пределов

---

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

**Автор:**

Кулаго А. С., ММФ БГУ  
[andrejs.kulago@icloud.com](mailto:andrejs.kulago@icloud.com)

**Обновлено:**

07.07.2025

**Ресурс:**

<https://theoremsy.com>

2025, Минск

## Теоретическая сводка

Если  $a_n \rightarrow a$ ,  $n \rightarrow \infty$  и  $b_n \rightarrow b$ ,  $n \rightarrow \infty$ , то

- 1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$ ,
- 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$ ,
- 3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (k \cdot b_n) = k \cdot a$ ,  $k \in \mathbb{R}$ ,
- 4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$  ( $b \neq 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N} : b_n \neq 0$ ).

Если  $c_n$  — ограниченная последовательность и  $d_n \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n \cdot d_n = 0.$$

Некоторые пределы, найденные по определению,

- |                                                                                                                          |                                                                          |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$ , $\alpha > 0$ ,                                                 | 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{k} = 1$ , $k > 0$ ,             |
| 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ , $ a  < 1$ ,                                                                   | 7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ,                       |
| 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\beta}{b^n}$ , $\beta \in \mathbb{R}$ , $ b  > 1$ ,                              | 8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$ ,            |
| 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log_d n)^\gamma}{n^\delta}$ , $d > 1$ , $\gamma \in \mathbb{R}$ , $\delta > 0$ , | 9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l^n}{n!} = 0$ , $l \in \mathbb{R}$ |
| 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ,                                                    | 10) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ .                   |

## Решение задач

### Задача простая (6)



Найдите предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + a + a^2 + \dots + a^n}{b + b^2 + b^3 + \dots + b^{n+1}}, \quad |b|, |a| < 1.$$

### Подсказка

Воспользуйтесь формулой для суммы первых  $n$  членов геометрической прогрессии  $S_n^g = b_1 \frac{(q^n - 1)}{(q - 1)}$ , где общий член прогрессии имеет вид  $a_n = b_1 q^{n-1}$ .

**Решение:**

Воспользуемся формулой для суммы первых  $n$  членов геометрической прогрессии  $S_n^g = b_1 \frac{(q^n - 1)}{(q - 1)}$ , где общий член прогрессии имеет вид  $a_n = b_1 q^{n-1}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + a + a^2 + \dots + a^n}{b + b^2 + b^3 + \dots + b^{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}}{b \cdot \frac{b^{n+1} - 1}{b - 1}} \\ &= \frac{b - 1}{(a - 1) \cdot b} \cdot \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1} - 1}{b^{n+1} - 1}}_{=1} = \frac{b - 1}{(a - 1) \cdot b}. \end{aligned}$$