Theoremsy / Теоре́мзи

Математический анализ

Техника вычисления пределов

задачи и решения

Автор:
Кулаго А. С., ММФ БГУ
andrejs.kulago@icloud.com

Обновлено:
07.07.2025

Ресурс:
https://theoremsy.com

2025, Минск

Теоретическая сводка

Если $a_n \to a,\ n \to \infty$ и $b_n \to b,\ n \to \infty$, то

$$1)\ \lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b,$$
$$2)\ \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b,$$
$$3)\ \lim_{n\to\infty}(k \cdot b_n) = k \cdot a,\ k \in \mathbb{R},$$
$$4)\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}:\ b_n \neq 0).$$

Если c_n — ограниченная последовательность и $d_n \to 0,\ n \to \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} c_n \cdot d_n = 0.$$

Некоторые пределы, найденные по определению,

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha} = 0,\ \alpha > 0,$$
$$2)\ \lim_{n\to\infty} a^n = 0,\ |a| < 1,$$
$$3)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^\beta}{b^n},\ \beta \in \mathbb{R},\ |b| > 1,$$
$$4)\ \lim_{n\to\infty}\frac{(\log_d n)^\gamma}{n^\delta},\ d > 1,\ \gamma \in \mathbb{R},\ \delta > 0,$$
$$5)\ \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$
$$6)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{k} = 1,\ k > 0,$$
$$7)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1,$$
$$8)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0,$$
$$9)\ \lim_{n\to\infty}\frac{l^n}{n!} = 0,\ l \in \mathbb{R}$$
$$10)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0.$$

Решение задач

Задача простая (4)

Вычислить предел
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right).$$

Подсказка

Дополните общий член последовательности до разности квадратов, умножив и разделив $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ на соответствующее выражение.

Решение:

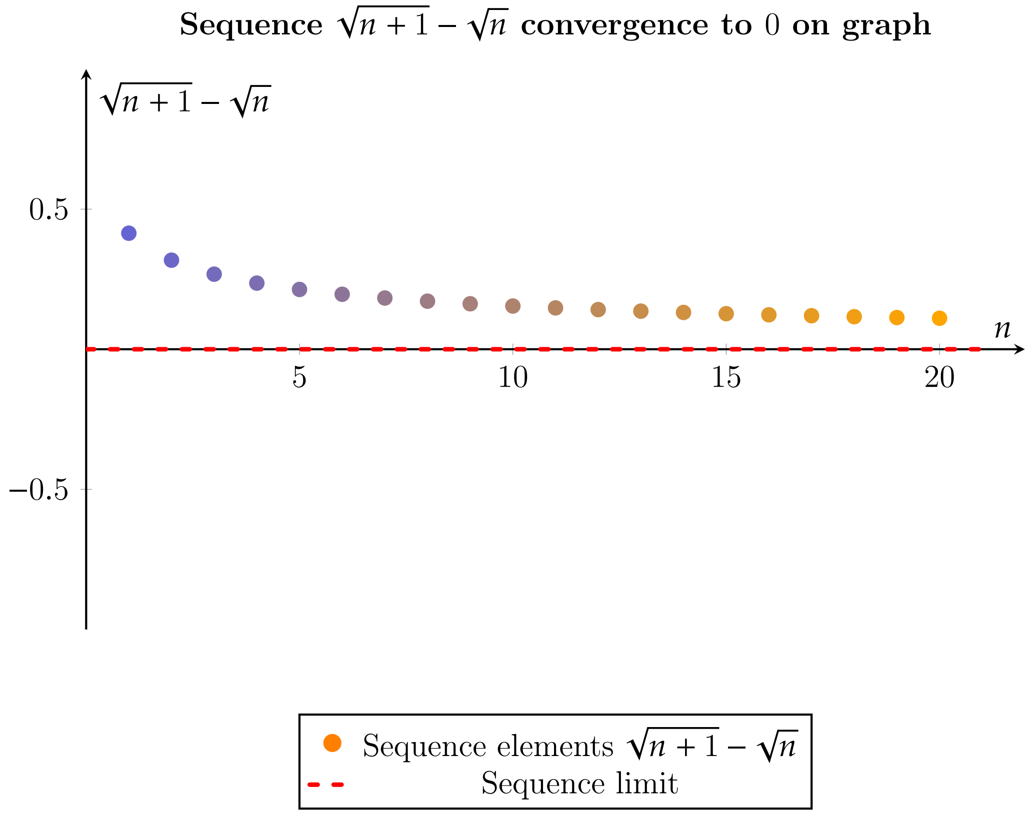
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Поскольку $0<\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{2\sqrt{n}}$ и $\frac{1}{2\sqrt{n}}\to 0,\ n\to\infty$, по теореме о зажатой переменной (теорема о двух милиционерах)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0.$$

Итак,
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0.$$

Для наглядности визуализируем полученный результат.


Sequence $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ convergence to 0 on graph
$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$
0.5
−0.5
5
10
15
20
n
Sequence elements $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$
Sequence limit