Theoremsy / Теоре́мзи

Математический анализ

Техника вычисления пределов

задачи и решения

Автор:
Кулаго А. С., ММФ БГУ
andrejs.kulago@icloud.com

Обновлено:
07.07.2025

Ресурс:
https://theoremsy.com

2025, Минск

Теоретическая сводка

Если $a_n \to a,\ n \to \infty$ и $b_n \to b,\ n \to \infty$, то

$$1)\ \lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b,$$
$$2)\ \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b,$$
$$3)\ \lim_{n\to\infty}(k \cdot b_n) = k \cdot a,\ k \in \mathbb{R},$$
$$4)\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}:\ b_n \neq 0).$$

Если c_n — ограниченная последовательность и $d_n \to 0,\ n \to \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} c_n \cdot d_n = 0.$$

Некоторые пределы, найденные по определению,

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha} = 0,\ \alpha > 0,$$
$$2)\ \lim_{n\to\infty} a^n = 0,\ |a| < 1,$$
$$3)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^\beta}{b^n},\ \beta \in \mathbb{R},\ |b| > 1,$$
$$4)\ \lim_{n\to\infty}\frac{(\log_d n)^\gamma}{n^\delta},\ d > 1,\ \gamma \in \mathbb{R},\ \delta > 0,$$
$$5)\ \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$
$$6)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{k} = 1,\ k > 0,$$
$$7)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1,$$
$$8)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0,$$
$$9)\ \lim_{n\to\infty}\frac{l^n}{n!} = 0,\ l \in \mathbb{R}$$
$$10)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0.$$

Решение задач

Задача средняя (10)

Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}.$$

Подсказка

Используя известную формулу (см. «Математическая индукция»)

$$1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}2^k=2^n-1$$

или напрямую при помощи математической индукции, докажите следующее равенство

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$$

и воспользуйтесь им для упрощения общего члена рассматриваемой последовательности.

Решение:

Разложим общий член последовательности на группы сумм следующим образом

$$\begin{aligned}
a_n = \frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n} &= \\
= 1\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right) &+ \\
+\,2\cdot\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right) &+ \\
+\,2\cdot\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right) &+ \\
+\quad \ldots \quad &+ \\
+\,2\cdot\left(\frac{1}{2^n}\right) &.
\end{aligned}$$

Вычислим суммы, находящиеся в скобках, используя известную формулу (см. «Математическая индукция»),

$$1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}2^k=2^n-1.$$

Итак,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}=\frac{2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots+1}{2^n}=\frac{2^n-1}{2^n}.$$

Подставим полученное выражение в разложенный ранее в группы сумм общий член последовательности

$$\begin{aligned} a_n = \ & 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + \\ + \ & 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \\ + \ & 2 \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n-2}}\right) + \\ + \ & \qquad \ldots \qquad + \\ + \ & 2 \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \left(1 - \frac{1}{2^{n-(n-1)}}\right). \end{aligned}$$

Раскрывая скобки и группируя члены, получим

$$a_n = \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-2}}\right) - \frac{1}{2^n} - \frac{n-1}{2^{n-1}} =$$

$$= 2 + \left(1 - \frac{1}{2^{n-2}}\right) - \frac{1}{2^n} - \frac{n-1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{1}{2^n} - \frac{n-1}{2^{n-1}}.$$

Очевидно, что все члены последнего выражения кроме тройки сходятся к нулю, откуда получаем результат

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2^k} = 3.$$

Для наглядности визуализируем полученный результат.

Sequence a_n convergence to 3 on graph