Theoremsy / Теоре́мзи

Математический анализ

Техника вычисления пределов

задачи и решения

Автор:
Кулаго А. С., ММФ БГУ
andrejs.kulago@icloud.com

Обновлено:
07.07.2025

Ресурс:
https://theoremsy.com

2025, Минск

Теоретическая сводка

Если $a_n \to a,\ n \to \infty$ и $b_n \to b,\ n \to \infty$, то

$$1)\ \lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b,$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b,$$

$$3)\ \lim_{n\to\infty}(k \cdot b_n) = k \cdot a,\ k \in \mathbb{R},$$

$$4)\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}:\ b_n \neq 0).$$

Если c_n — ограниченная последовательность и $d_n \to 0,\ n \to \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} c_n \cdot d_n = 0.$$

Некоторые пределы, найденные по определению,

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha} = 0,\ \alpha > 0,$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty} a^n = 0,\ |a| < 1,$$

$$3)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^\beta}{b^n},\ \beta \in \mathbb{R},\ |b| > 1,$$

$$4)\ \lim_{n\to\infty}\frac{(\log_d n)^\gamma}{n^\delta},\ d > 1,\ \gamma \in \mathbb{R},\ \delta > 0,$$

$$5)\ \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

$$6)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{k} = 1,\ k > 0,$$

$$7)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1,$$

$$8)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0,$$

$$9)\ \lim_{n\to\infty}\frac{l^n}{n!} = 0,\ l \in \mathbb{R}$$

$$10)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0.$$

Решение задач

Задача простая (1)

Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^3+1}.$$

Подсказка

Вынесите n и n^3 из числителя и знаменателя дроби соответственно, а далее рассмотрите предел произведения двух получившихся последовательностей.

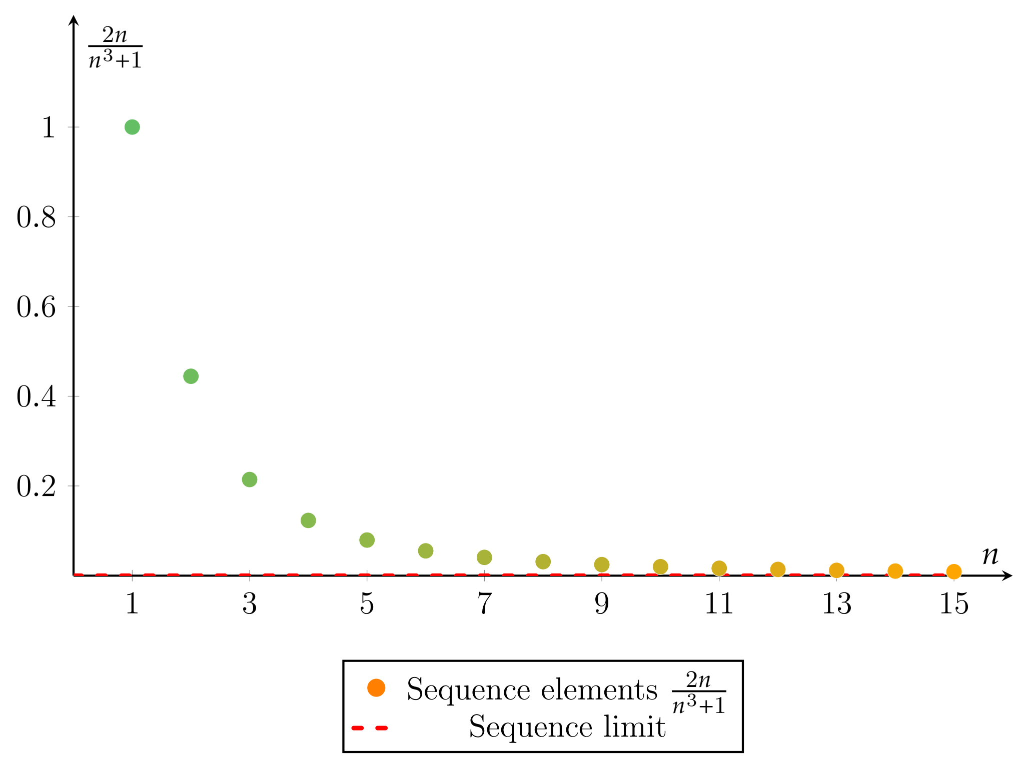
Решение:

Вынесем n^3 из знаменателя дроби и n — из числителя. Получим произведение двух сходящихся последовательностей, стремящееся к произведению их пределов,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n}{n^3}}_{\to 0} \cdot \overbrace{\frac{2}{1+\underbrace{\frac{1}{n^3}}_{\to 0}}}^{\to 2} = 0\cdot 2 = 0.$$

Для наглядности визуализируем полученный результат.

Sequence $\frac{2n}{n^3+1}$ convergence to 0 on graph



Задача простая (2)

Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot 0.9^n \cdot \cos\left(n^3\right).$$

Подсказка

Обратите внимание, что $(-1)^n$ и $\cos\left(n^3\right)$ — ограниченные последовательности.

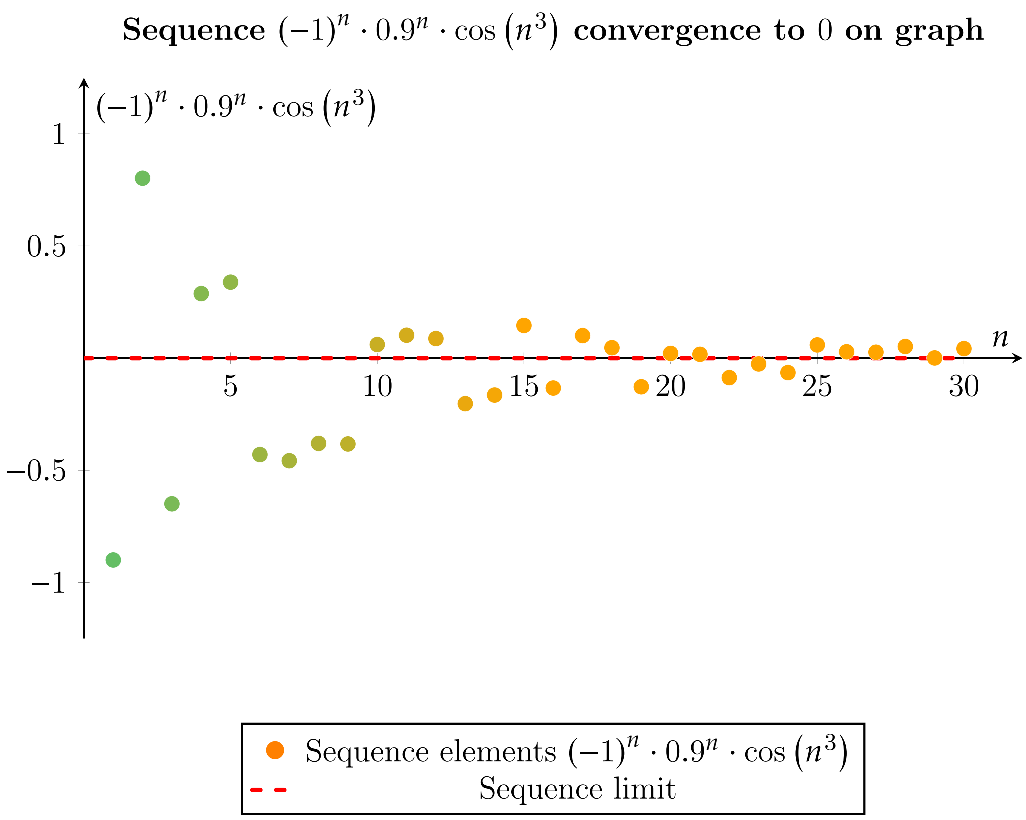
Решение:

Рассмотрим данную последовательность как произведение трёх последовательностей. Заметим, что $(-1)^n \le 1$ и $\cos\left(n^3\right) \le 1$ — ограниченные последовательности, а $0.9^n \to 0,\ n \to \infty$ — известный предел (общий член геометрической прогрессии с знаменателем меньше единицы).

Поскольку произведение органиченной последовательности на бесконечно малую последовательность стремится к нулю, получим

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot 0.9^n \cdot \cos\left(n^3\right) = 0.$$

Для наглядности визуализируем полученный результат.



Задача простая (3)

Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\cdot\cos(10n)}{n+3}.$$

Подсказка

Вынесите $\sqrt[3]{n^2}$ и n из числителя и знаменателя дроби соответственно и рассмотрите получившийся предел произведения последовательностей.

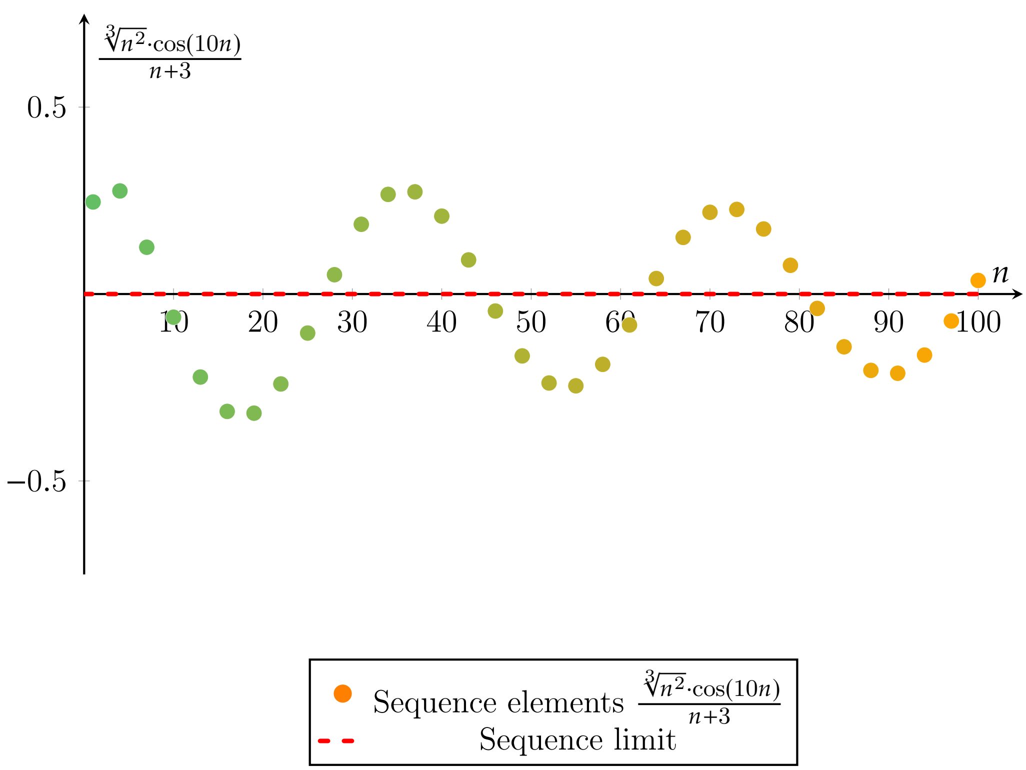
Решение:

Вынесем $\sqrt[3]{n^2}$ и n из числителя и знаменателя дроби соответственно и получим произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\cdot\cos(10n)}{n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{2}{3}}}{n}\cdot\frac{\overbrace{\cos(10n)}^{\leq 1}}{\underbrace{1+\frac{3}{n}}_{\to 1}}=0.$$

Для наглядности визуализируем полученный результат.

Sequence $\frac{\sqrt[3]{n^2}\cdot\cos(10n)}{n+3}$ convergence to 0 on graph



Задача простая (4)

Вычислить предел
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right).$$

Подсказка

Дополните общий член последовательности до разности квадратов, умножив и разделив $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ на соответствующее выражение.

Решение:

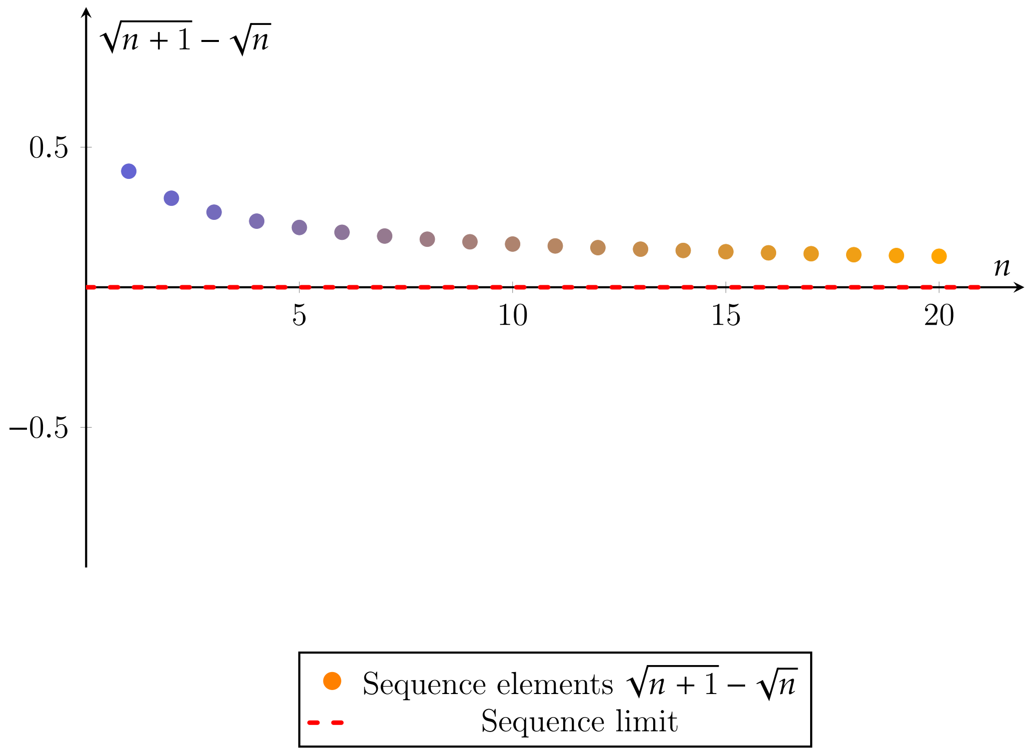
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Поскольку $0<\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{2\sqrt{n}}$ и $\frac{1}{2\sqrt{n}}\to 0,\ n\to\infty$, по теореме о зажатой переменной (теорема о двух милиционерах)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0.$$

Итак,
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0.$$

Для наглядности визуализируем полученный результат.

Sequence $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ convergence to 0 on graph



Задача простая (5)

Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-a)^n + b^n}{(-a)^{n+1} + b^{n+1}}, \ 0 < a < b.$$

Подсказка

Вынесите b^n и b^{n+1} из числителя и знаменателя соответственно.

Решение:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-a)^n + b^n}{(-a)^{n+1} + b^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{b^n}{b^{n+1}} \cdot \frac{1 + \left(-\frac{a}{b}\right)^n}{1 + \left(-\frac{a}{b}\right)^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \overbrace{\left(-\dfrac{a}{b}\right)^n}^{\to 0}}{1 + \underbrace{\left(-\dfrac{a}{b}\right)^{n+1}}_{\to 0}} = \frac{1}{b}.$$

Задача простая (6)

Найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{b+b^2+b^3+\ldots+b^{n+1}},\ |b|\,,|a|<1.$$

Подсказка

Воспользуйтесь формулой для суммы первых n членов геометрической прогрессии $S_n^g = b_1\frac{(q^n-1)}{(q-1)}$, где общий член прогрессии имеет вид $a_n = b_1 q^{n-1}$.

Решение:

Воспользуемся формулой для суммы первых n членов геометрической прогрессии $S_n^g = b_1\frac{(q^n-1)}{(q-1)}$, где общий член прогрессии имеет вид $a_n = b_1 q^{n-1}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{b+b^2+b^3+\ldots+b^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a^{n+1}-1}{a-1}}{b\cdot\frac{b^{n+1}-1}{b-1}}$$

$$= \frac{b-1}{(a-1)\cdot b}\cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}-1}{b^{n+1}-1}}_{=1} = \frac{b-1}{(a-1)\cdot b}.$$

Задача простая (7)

Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n^2}.$$

Подсказка

Воспользуйтесь формулой для суммы первых n членов арифметической прогресии.

Решение:

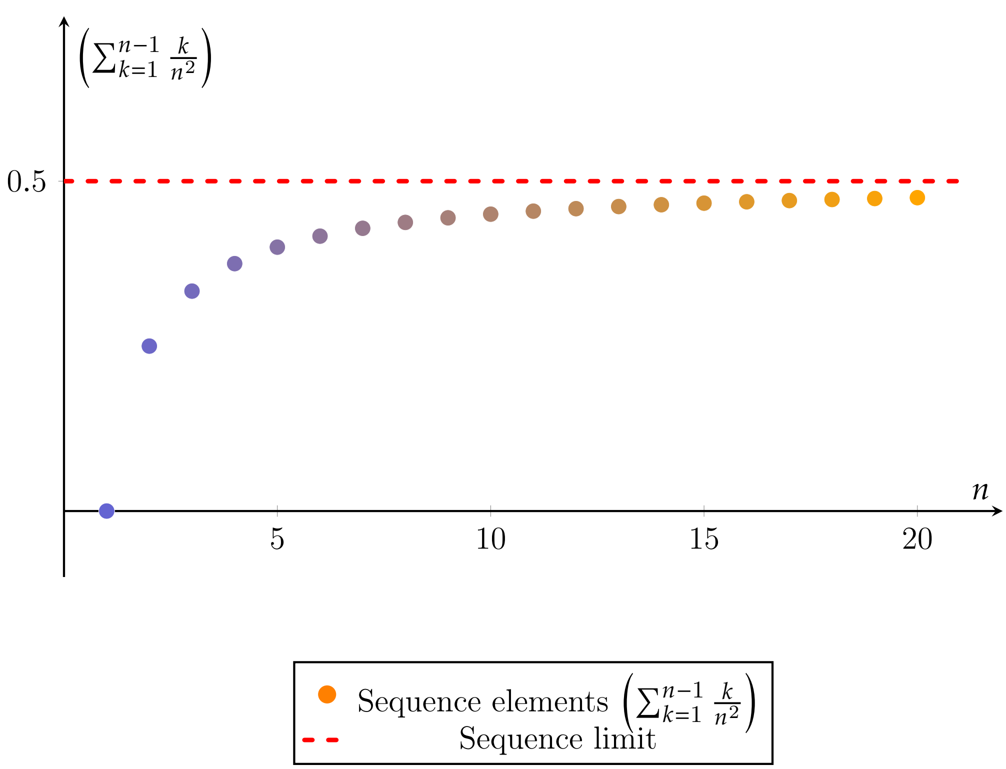
Для упрощения выражения воспользуемся формулой для суммы первых n членов арифметической прогрессии $S_n^a = \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{k=1}^{n-1}k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1+n-1}{2}\cdot(n-1)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\underbrace{\frac{1}{2n}}_{\to 0}\right)=\frac{1}{2}.$$

Для наглядности визуализируем полученный результат.

Sequence $\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n^2}\right)$ convergence to $\frac{1}{2}$ on graph



Задача средняя (8)

Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}\cdot n}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\cdot k}{n}\right|.$$

Подсказка

Рассмотрите знаменатель общего члена последовательности отдельно для n чётного и n нечётного. Покажите, что в обоих случаях пределы подпоследовательностей совпадают. Пользуясь теоремой о двух милиционерах, сделайте вывод о сходимости последовательности.

Решение:

Рассмотрим числитель общего члена последовательности для n чётного

$$1-2+3-\ldots-n=(1-2)+(3-4)+\ldots+(n-1-n)=-\frac{n}{2}$$

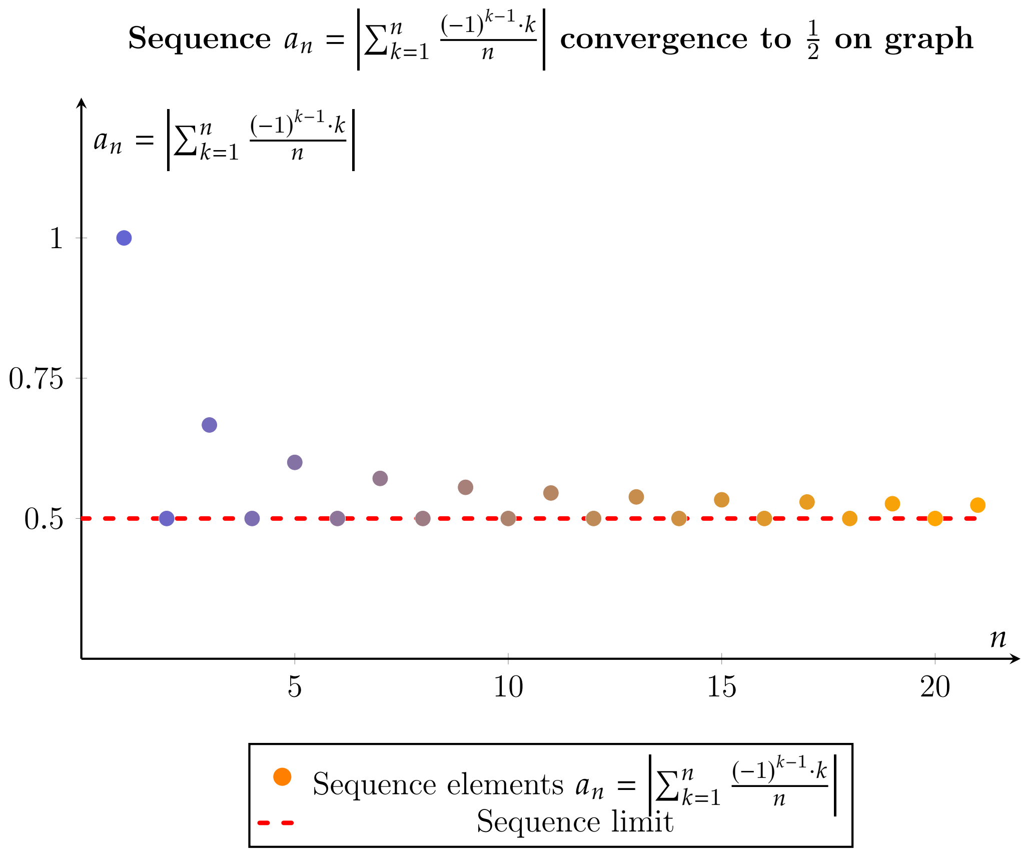
и для n нечётного

$$1-2+3-\ldots+n=(1-2)+\ldots+(n-2-(n-1))+n=-\frac{n-1}{2}+n.$$

Тогда общий член последовательности (обозначим его a_n) лежит на между

$$\frac{1}{2}=\left|\frac{-\frac{n}{2}}{n}\right|\le a_n\le\left|\frac{-\frac{n-1}{2}+n}{n}\right|=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}.$$

Поскольку $\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\longrightarrow\infty,\ n\longrightarrow\infty$, по теореме о зажатой последовательности (теорема о двух милиционерах) $a_n\longrightarrow\frac{1}{2},\ n\longrightarrow\infty$. Для наглядности визуализируем полученный результат.


Sequence $a_n = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\cdot k}{n}\right|$ convergence to $\frac{1}{2}$ on graph
$a_n = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\cdot k}{n}\right|$
1
0.75
0.5
n
5
10
15
20
Sequence elements $a_n = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\cdot k}{n}\right|$
Sequence limit

Задача простая (9)

Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \ldots + \frac{(n-1)^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2}{n^3}.$$

Подсказка

Воспользуйтесь формулой

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Решение:

Воспользуемся известной формулой (см. «Математическая индукция»)

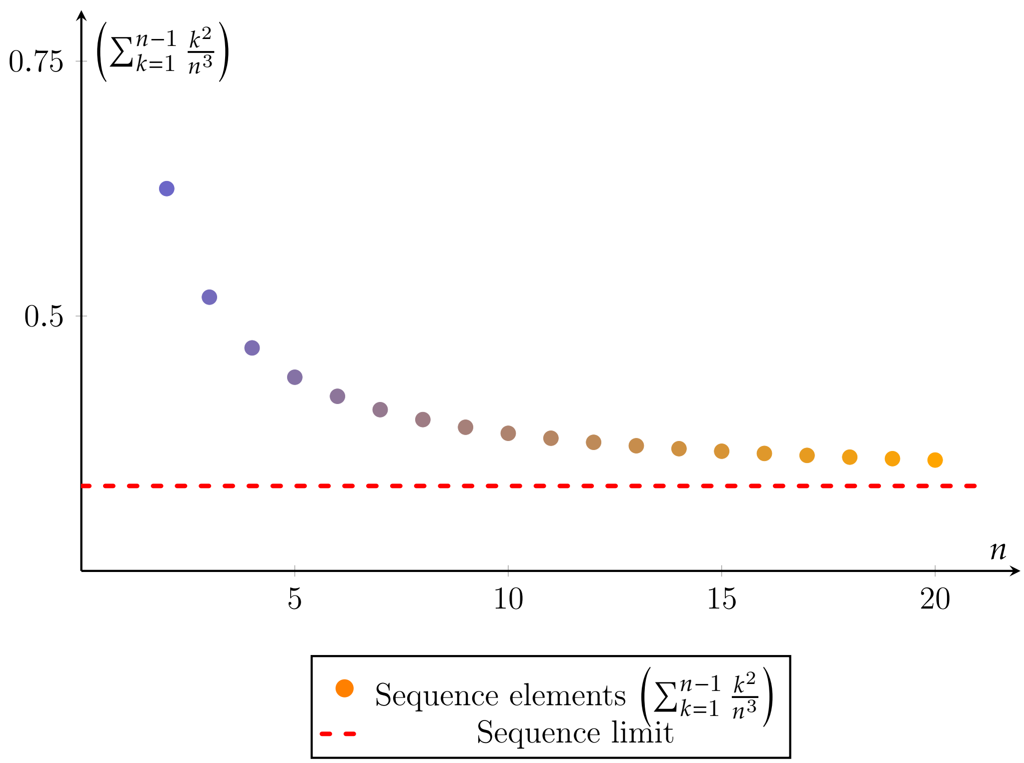
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{\to 1} \underbrace{\left(2 + \frac{1}{n}\right)}_{\to 2} = \frac{1}{3}.$$

Для наглядности визуализируем полученный результат.

Sequence $\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2}{n^3}\right)$ convergence to $\frac{1}{3}$ on graph



Задача средняя (10)

Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \ldots + \frac{2n-1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2^k}.$$

Подсказка

Используя известную формулу (см. «Математическая индукция»)

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1$$

или напрямую при помощи математической индукции, докажите следующее равенство

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

и воспользуйтесь им для упрощения общего члена рассматриваемой последовательности.

Решение:

Разложим общий член последовательности на группы сумм следующим образом

$$\begin{aligned} a_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \ldots + \frac{2n-1}{2^n} = \\ = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2^n} \right) + \\ + 2 \cdot \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2^n} \right) + \\ + 2 \cdot \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2^n} \right) + \\ + \quad \ldots \quad + \\ + 2 \cdot \left(\frac{1}{2^n} \right). \end{aligned}$$

Вычислим суммы, находящиеся в скобках, используя известную формулу (см. «Математическая индукция»),

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1.$$

Итак,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}.$$

Подставим полученное выражение в разложенный ранее в группы сумм общий член последовательности

$$\begin{aligned} a_n = \ & 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + \\ & + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \\ & + 2 \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n-2}}\right) + \\ & + \quad \ldots \quad + \\ & + 2 \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \left(1 - \frac{1}{2^{n-(n-1)}}\right). \end{aligned}$$

Раскрывая скобки и группируя члены, получим

$$a_n = \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-2}}\right) - \frac{1}{2^n} - \frac{n-1}{2^{n-1}} =$$

$$= 2 + \left(1 - \frac{1}{2^{n-2}}\right) - \frac{1}{2^n} - \frac{n-1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{1}{2^n} - \frac{n-1}{2^{n-1}}.$$

Очевидно, что все члены последнего выражения кроме тройки сходятся к нулю, откуда получаем результат

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2^k} = 3.$$

Для наглядности визуализируем полученный результат.