Theoremsy / Теоре́мзи

Математический анализ

Математическая индукция

задачи и решения

Автор:
Кулаго А. С., ММФ БГУ
andrejs.kulago@icloud.com

Обновлено:
07.07.2025

Ресурс:
https://theoremsy.com

2025, Минск

Теоретическая сводка

Пусть $P(n)$ есть некоторое утверждение, зависящее от натурального аргумента $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что $P(n)$ верно для любого натурального числа, можно при помощи **метода математической индукции**. Последний заключается в следующем.

Если $P(1)$ верно (**база индукции**), а из истинности $P(k)$ следует истинность $P(k+1)$ (**индукционный переход**), т. е.

$$P(k) \implies P(k+1), \tag{1}$$

то исходное утверждение $P(n)$ справедливо для любого натурального аргумента $\forall n \in \mathbb{N}$.

Следует заметить, что метод математической индукции может быть сужен (расширен) и на другие множества аргументов. Так, например, в качестве базы индукции можно взять не единицу, а любое другое натуральное число p. При таком выборе доказанное утверждение будет справедливо для $\forall n \geq p$.

Решение задач

Задача простая (7)

Доказать неравенство

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

$$\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{2i-1}{2i}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right).$$

Подсказка

Проверьте выполнение базы индукции и совершите индукционный переход, оценив сверху левую часть доказываемого неравенства при $n = k + 1$.

Решение:

Выполнение **базы индукции** очевидно в силу $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Пусть теперь рассматриваемое неравенство выполняется для $n = k$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2k}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}.$$

Покажем теперь, что из этого предположения следует верность того же неравенства для $k + 1$ (совершим **индукционный переход**)

$$\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2k}}_{<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}<$$

$$<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}=\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}<$$

$$<\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+1}=\frac{1}{\sqrt{2k+1}}.$$

Неравенство доказано.