Theoremsy / Теоре́мзи

Математический анализ

Математическая индукция

задачи и решения

Автор:
Кулаго А. С., ММФ БГУ
andrejs.kulago@icloud.com

Обновлено:
07.07.2025

Ресурс:
https://theoremsy.com

2025, Минск

Теоретическая сводка

Пусть $P(n)$ есть некоторое утверждение, зависящее от натурального аргумента $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что $P(n)$ верно для любого натурального числа, можно при помощи **метода математической индукции**. Последний заключается в следующем.

Если $P(1)$ верно (**база индукции**), а из истинности $P(k)$ следует истинность $P(k+1)$ (**индукционный переход**), т. е.

$$P(k) \implies P(k+1), \tag{1}$$

то исходное утверждение $P(n)$ справедливо для любого натурального аргумента $\forall n \in \mathbb{N}$.

Следует заметить, что метод математической индукции может быть сужен (расширен) и на другие множества аргументов. Так, например, в качестве базы индукции можно взять не единицу, а любое другое натуральное число p. При таком выборе доказанное утверждение будет справедливо для $\forall n \geq p$.

Решение задач

Задача простая (6)

Доказать формулу для нахождения суммы первых n членов геометрической прогрессии

$$\sum_{i=0}^{n-1} b_1 \cdot q^i = b_1 + b_1 \cdot q^1 + b_1 \cdot q^2 + \ldots + b_1 \cdot q^{n-1} = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Подсказка

Проверьте выполнение базы индукции. Далее запишите доказываемую формулу для $k+1$, а затем, заменив первые k слагаемых формулы на $b_1 \frac{q^n-1}{q-1}$ и алгебраически преобразовав полученное равенство, совершите индукционный переход.

Решение:

Выполнение **базы индукции** очевидно в силу тождества $b_1 = b_1$.

Пусть теперь рассматриваемое утверждение выполняется для $n = k$

$$b_1 + b_1 \cdot q^1 + b_1 \cdot q^2 + \ldots + b_1 \cdot q^{k-1} = b_1 \frac{q^k - 1}{q - 1}.$$

Покажем теперь, что из этого предположения следует верность того же утверждения для $k+1$ (совершим **индукционный переход**)

$$\underbrace{b_1 + b_1 \cdot q^1 + b_1 \cdot q^2 + \ldots + b_1 \cdot q^{k-1}}_{b_1 \frac{q^k-1}{q-1}} + b_1 \cdot q^k =$$

$$= b_1 \cdot \left(\frac{q^k - 1}{q - 1} + q^k \right) = b_1 \cdot \frac{q^k - 1 + q^{k+1} - q^k}{q - 1} =$$

$$= b_1 \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}.$$

Формула доказана.