Theoremsy / Теоре́мзи

Математический анализ

Математическая индукция

задачи и решения

Автор:
Кулаго А. С., ММФ БГУ
andrejs.kulago@icloud.com

Обновлено:
07.07.2025

Ресурс:
https://theoremsy.com

2025, Минск

Теоретическая сводка

Пусть $P(n)$ есть некоторое утверждение, зависящее от натурального аргумента $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что $P(n)$ верно для любого натурального числа, можно при помощи **метода математической индукции**. Последний заключается в следующем.

Если $P(1)$ верно (**база индукции**), а из истинности $P(k)$ следует истинность $P(k+1)$ (**индукционный переход**), т. е.

$$P(k) \implies P(k+1), \tag{1}$$

то исходное утверждение $P(n)$ справедливо для любого натурального аргумента $\forall n \in \mathbb{N}$.

Следует заметить, что метод математической индукции может быть сужен (расширен) и на другие множества аргументов. Так, например, в качестве базы индукции можно взять не единицу, а любое другое натуральное число p. При таком выборе доказанное утверждение будет справедливо для $\forall n \geq p$.

Решение задач

Задача средняя (5)

Доказать равенство

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2\,,$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{i} i\right)^2\right).$$

Подсказка

При совершении индукционного перехода воспользуйтесь формулой для суммы первых n членов арифметической прогрессии

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n+1}{2} \cdot n.$$

Решение:

Выполнение **базы индукции** очевидно в силу тождества $1 = 1$.

Пусть теперь рассматриваемое утверждение выполняется для $n = k$

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = (1 + 2 + \ldots + k)^2\,.$$

Покажем теперь, что из этого предположения следует верность того же утверждения для $k + 1$ (совершим **индукционный переход**)

$$\begin{aligned}
&\underbrace{1^3 + 2^3 + \ldots + k^3}_{(1+2+\ldots+k)^2} + (k+1)^3 = \\
&= (1 + 2 + \ldots + k)^2 + (k+1)^3 = \\
&= \left(\frac{1+k}{2} \cdot k\right)^2 + (k+1)^3 = \\
&= (k+1)^2 \cdot \left(\frac{k^2}{4} + k + 1\right) = \\
&= (k+1)^2 \cdot \left(\frac{k}{2} + 1\right)^2 = \\
&= \left[\frac{(k+1)+1}{2} \cdot (k+1)\right]^2 = \\
&= (1 + 2 + \ldots + k + (k+1))^2\,.
\end{aligned}$$

Здесь дважды использовалась доказанная ранее формула для суммы первых n членов арифметической прогрессии

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n+1}{2} \cdot n.$$