Theoremsy / Теоре́мзи

Математический анализ

Математическая индукция

задачи и решения

Автор:
Кулаго А. С., ММФ БГУ
andrejs.kulago@icloud.com

Обновлено:
07.07.2025

Ресурс:
https://theoremsy.com

2025, Минск

Теоретическая сводка

Пусть $P(n)$ есть некоторое утверждение, зависящее от натурального аргумента $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что $P(n)$ верно для любого натурального числа, можно при помощи **метода математической индукции**. Последний заключается в следующем.

Если $P(1)$ верно (**база индукции**), а из истинности $P(k)$ следует истинность $P(k+1)$ (**индукционный переход**), т. е.

$$P(k) \implies P(k+1), \tag{1}$$

то исходное утверждение $P(n)$ справедливо для любого натурального аргумента $\forall n \in \mathbb{N}$.

Следует заметить, что метод математической индукции может быть сужен (расширен) и на другие множества аргументов. Так, например, в качестве базы индукции можно взять не единицу, а любое другое натуральное число p. При таком выборе доказанное утверждение будет справедливо для $\forall n \geq p$.

Решение задач

Задача простая (4)

Доказать равенство

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1$$

Подсказка

Проверьте выполнение базы индукции. Далее запишите доказываемую формулу для $k+1$, а затем, заменив первые k слагаемых формулы на $2^k - 1$ и алгебраически преобразовав полученное равенство, совершите индукционный переход.

Решение:

Для начала проверим выполнение **базы индукции**

$$\sum_{i=0}^{0} 2^i = 1 = 2^1 - 1.$$

Пусть теперь наше утверждение справедливо для некоторого $n = k$, т. е.

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} 2^i = 2^k - 1$$

Покажем теперь, что из этого предположения следует верность того же утверждения для $k + 1$ (совершим **индукционный переход**)

$$\underbrace{1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{k-1}}_{2^k - 1} + 2^k =$$
$$= 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1.$$

Формула доказана.