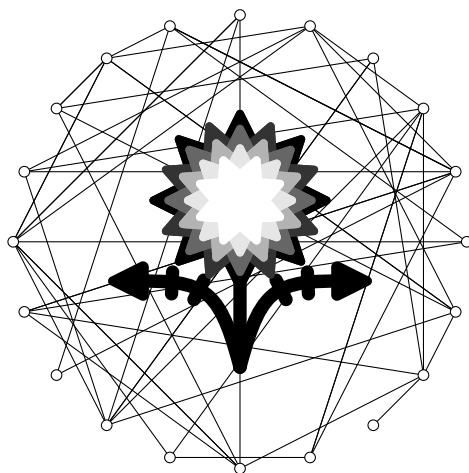




THEOREMSY / ТЕОРЕМЗИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Математическая индукция

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Автор:

Кулаго А. С., ММФ БГУ
andrejs.kulago@icloud.com

Обновлено:

27.05.2025

Ресурс:

<https://theoremsy.com>

2025, Минск

Теоретическая сводка

Пусть $P(n)$ есть некоторое утверждение, зависящее от натурального аргумента $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что $P(n)$ верно для любого натурального числа, можно при помощи **метода математической индукции**. Последний заключается в следующем.

Если $P(1)$ верно (**база индукции**), а из истинности $P(k)$ следует истинность $P(k+1)$ (**индукционный переход**), т. е.

$$P(k) \implies P(k+1), \quad (1)$$

то исходное утверждение $P(n)$ справедливо для любого натурального аргумента $\forall n \in \mathbb{N}$.

Следует заметить, что метод математической индукции может быть сужен (расширен) и на другие множества аргументов. Так, например, в качестве базы индукции можно взять не единицу, а любое другое натуральное число p . При таком выборе доказанное утверждение будет справедливо для $\forall n \geq p$.

Решение задач

Задача простая (2)



Доказать формулу

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Подсказка

Проверьте выполнение базы индукции. Далее запишите доказываемую формулу для $k+1$, а затем, заменив первые k слагаемых формулы на $\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ и алгебраически преобразовав полученное равенство, совершите индукционный переход.

Решение:

Будем использовать в дальнейшем форму записи с использованием символа суммы Σ . Проверим **базу индукции**

$$\sum_{i=1}^1 i^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}.$$

Пусть теперь выполняется

$$\sum_{i=1}^k i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Тогда нетрудно совершить **индукционный переход**

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} i^2 &= \sum_{i=1}^k i^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \\ &= \frac{(k+1)}{6} [k(2k+1) + 6(k+1)] = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}. \end{aligned}$$