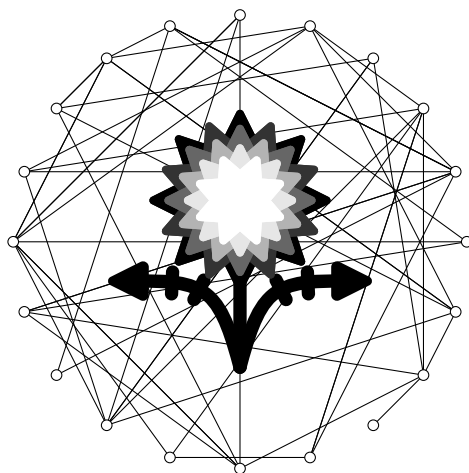




THEOREMSY / ТЕОРЕМЗИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Математическая индукция

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Автор:

Кулаго А. С., ММФ БГУ
andrejs.kulago@icloud.com

Обновлено:

27.05.2025

Ресурс:

<https://theoremsy.com>

2025, Минск

Теоретическая сводка

Пусть $P(n)$ есть некоторое утверждение, зависящее от натурального аргумента $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что $P(n)$ верно для любого натурального числа, можно при помощи **метода математической индукции**. Последний заключается в следующем.

Если $P(1)$ верно (**база индукции**), а из истинности $P(k)$ следует истинность $P(k+1)$ (**индукционный переход**), т. е.

$$P(k) \implies P(k+1), \quad (1)$$

то исходное утверждение $P(n)$ справедливо для любого натурального аргумента $\forall n \in \mathbb{N}$.

Следует заметить, что метод математической индукции может быть сужен (расширен) и на другие множества аргументов. Так, например, в качестве базы индукции можно взять не единицу, а любое другое натуральное число p . При таком выборе доказанное утверждение будет справедливо для $\forall n \geq p$.

Решение задач

Задача простая (1)



Доказать формулу нахождения суммы арифметической прогрессии

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Подсказка

Проверьте выполнение базы индукции. Далее запишите доказываемую формулу для $k+1$, а затем, заменив первые k слагаемых формулы на $\frac{k(k+1)}{2}$ и алгебраически преобразовав полученное равенство, совершите индукционный переход.

Решение:

Для начала проверим выполнение **базы индукции**

$$\sum_{i=1}^1 i = 1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$

Пусть теперь наше утверждение справедливо для некоторого k , т. е.

$$\sum_{i=1}^k i = 1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Покажем теперь, что из этого предположения следует верность того же утверждения для $k+1$ (совершим **индукционный переход**)

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + (k+1) &= \\ &= \underbrace{1 + 2 + \dots + k}_{\frac{k(k+1)}{2}} + (k+1) = \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \\ &= (k+1) \left(\frac{k}{2} + 1 \right) = \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \end{aligned}$$

Формула доказана.

Задача простая (2)



Доказать формулу

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Подсказка

Проверьте выполнение базы индукции. Далее запишите доказываемую формулу для $k+1$, а затем, заменив первые k слагаемых формулы на $\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ и алгебраически преобразовав полученное равенство, совершите индукционный переход.

Решение:

Будем использовать в дальнейшем форму записи с использованием символа суммы Σ . Проверим **базу индукции**

$$\sum_{i=1}^1 i^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}.$$

Пусть теперь выполняется

$$\sum_{i=1}^k i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Тогда нетрудно совершить **индукционный переход**

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} i^2 &= \sum_{i=1}^k i^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \\ &= \frac{(k+1)}{6} [k(2k+1) + 6(k+1)] = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}. \end{aligned}$$

Задача средняя (3)



Доказать *неравенство Бернулли*

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

$$\left(\prod_{i=1}^n (1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n x_i \right),$$

где $x_i > -1$, при чём все x_i — одного знака.

Подсказка

Для совершения индукционного перехода необходимо домножить неравенство при $n = k$ на $(1 + x_{k+1})$, а далее оценить правую часть неравенства снизу.

Решение:

Выполнение **базы индукции** очевидно в силу тождества $1 + x_1 = 1 + x_1$.

Пусть теперь выполняется неравенство для $n = k$

$$\prod_{i=1}^k (1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^k x_i.$$

Домножим это неравенство на положительную (в силу условия $x_i > -1$) величину $1 + x_{k+1}$

$$\prod_{i=1}^{k+1} (1 + x_i) \geq \left(1 + \sum_{i=1}^k x_i \right) (1 + x_{k+1}).$$

Оценим выражение в правой неравенства части снизу

$$\begin{aligned} \left(1 + \sum_{i=1}^k x_i \right) (1 + x_{k+1}) &= \\ &= 1 + x_{k+1} + \sum_{i=1}^k x_i + x_{k+1} \left(\sum_{i=1}^k x_i \right) = \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{k+1} x_i + \underbrace{x_{k+1} \left(\sum_{i=1}^k x_i \right)}_{>0} \geq 1 + \sum_{i=1}^{k+1} x_i. \end{aligned}$$

Произведение x_{k+1} на сумму $\sum_{i=1}^k x_i$ положительна в силу того, что все x_i по условию имеют один знак. Итак, совмещая два неравенства, окончательно совершаем **индукционный переход**

$$\prod_{i=1}^{k+1} (1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{k+1} x_i.$$