Theoremsy / Теоре́мзи

Математический анализ

Определение предела функции

задачи и решения

Автор:
Кулаго А. С., ММФ БГУ
andrejs.kulago@icloud.com

Обновлено:
26.08.2025

Ресурс:
https://theoremsy.com

2025, Харбин

Теоретическая сводка

Дорогой читатель, обращаю Ваше внимение на то, что все задачи данного раздела особенно трудные и имеют сугубо теоретическую ценность. Если у Вас не получается разобрать данный материал — не отчаивайтесь, рассмотрите следующие разделы и возвращайтесь к этой теме позднее!

Окрестностью точки a называется любой интервал $U_a = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, содержащий эту точку. Интервал

$$U_a(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : \ |x - a| < \varepsilon\}$$

называется **ε-окрестностью точки** a. Множество

$$U_a^\circ = U_a \setminus \{a\} \quad (U_a^\circ(\varepsilon) = U_a(\varepsilon) \setminus \{a\})$$

называется **проколотой (ε-) окрестностью точки** a.

Окрестностью бесконечности ∞ называется любое множество

$$U_\infty = (-\infty, \alpha) \cup (\beta, +\infty) \subset \mathbb{R}.$$

Аналогично вводятся **окрестности минус ($-\infty$) и плюс ($+\infty$) бесконечностей**

$$U_{-\infty} = (-\infty, \alpha) \subset \mathbb{R}, \quad U_{+\infty} = (\beta, +\infty) \subset \mathbb{R}.$$

Элемент $a \in D$ называется **предельной точкой** множества D, если в любой окрестности этой точки найдётся хоть один элемент из D, т. е.

$$\forall U_a \quad \exists x \in D : \quad x \in D.$$

Если точка множества не является предельной, её называют **изолированной**.

Пусть задана некоторая функция $f : D \to X \subset \mathbb{R}$ и $a \in D$ — предельная точка области определения D функции. Следующее определение называется определением **предела функции по Коши (на языке ε–δ)**.

Число $b \in \mathbb{R}$ называется **пределом функции** f в точке a, если справедливо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in D : \quad 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Этот факт обозначается следующим образом

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad (f(x) \to b, \ x \to a).$$

То же определение **предела функции по Коши**, но **на языке окрестностей** выглядит так

$$\forall V_b \quad \exists U_a^\circ : \quad f(U_a^\circ \cap D) \subset V_b$$

или

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad f(U_a^\circ(\delta) \cap D) \subset V_b(\varepsilon).$$

Пусть снова задана функция $f : D \to X \subset \mathbb{R}$ и $a \in D$ — предельная точка D. Следующее определение называется определением **предела функции по Гейне**.

Число $b \in \mathbb{R}$ называется **пределом функции** f в точке a, если выполняется

$$\forall \{x_n\} \subset D \setminus \{a\}, \; x_n \to a \;\; (n \to \infty): \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b.$$

Согласно **критерию Гейне** *определения предела по Коши и по Гейне равносильны.*

Пусть задана функция $f : D \to X \subset \mathbb{R}$, при этом D не ограничена сверху (снизу, сверху и снизу). Число b называется **пределом функции** f **на** $+\infty$ $(-\infty, \; \infty)$, если

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad x > \Delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon \\ \big(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad x < -\Delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad |x| > \Delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon\big).\end{gathered}$$

Функция называется **бесконечно большой** при $x \to a$, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \overset{\text{def}}{\iff} \forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x)| > A.$$

Заменяя $|f(x)| > A$ на $f(x) > A$ и $f(x) < -A$ соответственно, получают знакоопределённые бесконечно большие пределы

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

Аналогично определяются бесконечно большие функции при $x \to \infty$, $x \to \pm\infty$.

Пусть задана функция $f : D \to X \subset \mathbb{R}$ и a — предельная точка D. Число b называется **правым (левым) пределом функции** f **в точке** a, если

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad 0 < x - a < \delta \to |f(x) - b| < \varepsilon \\ \big(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad 0 < a - x < \delta \to |f(x) - b| < \varepsilon\big),\end{gathered}$$

и обозначается

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a+0) \quad \Big(\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a-0)\Big).$$

Правый и левый пределы называются **односторонними пределами**. Справедлив следующий критерий существования предела функции: *функция имеет предел тогда и только тогда, когда оба её односторонних предела существуют, и они равны.*

Решение задач

Задача средняя (7)

Исходя из определения предела функции, доказать, что

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\cos x = \frac{1}{2}.$$

Подсказка

Рассмотрите модуль разности функции и её предельного значения. Используя тождество

$$\cos x - \cos\frac{\pi}{3} = -2\sin\left(\frac{x+\frac{\pi}{3}}{2}\right)\sin\left(\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2}\right),$$

неравенства $|\sin t| \le 1$ и $|\sin t| \le |t|$, а также предположение $\left|x-\frac{\pi}{3}\right| < \delta$, оцените модуль разности сверху так, чтобы полученное выражение не зависело от x (а только от δ). Из условия, что оценка модуля разности меньше ε, для всякого произвольного $\varepsilon > 0$ определите соответствующее число δ. На этом доказательство будет закончено.

Решение:

По определению Коши (на языке $\varepsilon - \delta$) существование предела $\cos x \longrightarrow \frac{1}{2}$, $x \longrightarrow \frac{\pi}{3}$ означает, что

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}: \quad 0 < \left|x-\frac{\pi}{3}\right| < \delta \implies \left|\cos x - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon.$$

Далее нам потребуется тождество разности косинусов

$$\cos x - \cos\frac{\pi}{3} = -2\sin\left(\frac{x+\frac{\pi}{3}}{2}\right)\sin\left(\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2}\right).$$

Рассмотрим модуль разности функции и её предела, используя оценки $|\sin x| \le 1$ и $|\sin t| \le |t| \quad \forall x, t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\left|\cos x - \frac{1}{2}\right| = &\left|\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\right| = \\ =&2\cdot\underbrace{\left|\sin\left(\frac{x+\frac{\pi}{3}}{2}\right)\right|}_{<1}\cdot\underbrace{\left|\sin\left(\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2}\right)\right|}_{<\frac{\left|x-\frac{\pi}{3}\right|}{2}} < \\ <&\left|x-\frac{\pi}{3}\right| < \delta < \varepsilon.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что в качестве δ можно взять $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$.

Для наглядности построим график функции $\cos x$ в окрестности точки $x = \frac{\pi}{3}$.

Limit $\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \cos x = \frac{1}{2}$ visualization