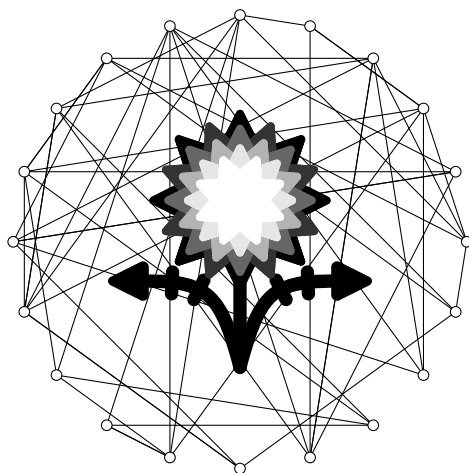




THEOREMSY / ТЕОРЕМЗИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Определение предела функции

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Автор:

Кулаго А. С., ММФ БГУ
andrejs.kulago@icloud.com

Обновлено:

26.08.2025

Ресурс:

<https://theoremsy.com>

2025, Харбин

Теоретическая сводка

Дорогой читатель, обращаю Ваше внимание на то, что все задачи данного раздела особенно трудные и имеют сугубо теоретическую ценность. Если у Вас не получается разобрать данный материал — не отчаивайтесь, рассмотрите следующие разделы и возвращайтесь к этой теме позднее!

Окрестностью точки a называется любой интервал $U_a = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, содержащий эту точку. Интервал

$$U_a(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$$

называется **ε -окрестностью точки a** . Множество

$$U_a^\circ = U_a \setminus \{a\} \quad (U_a^\circ(\varepsilon) = U_a(\varepsilon) \setminus \{a\})$$

называется **проколотой (ε -) окрестностью точки a** .

Окрестностью бесконечности ∞ называется любое множество

$$U_\infty = (-\infty, \alpha) \cup (\beta, +\infty) \subset \mathbb{R}.$$

Аналогично вводятся **окрестности минус $(-\infty)$ и плюс $(+\infty)$ бесконечностей**

$$U_{-\infty} = (-\infty, \alpha) \subset \mathbb{R}, \quad U_{+\infty} = (\beta, +\infty) \subset \mathbb{R}.$$

Элемент $a \in D$ называется **предельной точкой** множества D , если в любой окрестности этой точки найдётся хоть один элемент из D , т. е.

$$\forall U_a \quad \exists x \in D : \quad x \in D.$$

Если точка множества не является предельной, её называют **изолированной**.

Пусть задана некоторая функция $f : D \rightarrow X \subset \mathbb{R}$ и $a \in D$ — предельная точка области определения D функции. Следующее определение называется определением **предела функции по Коши (на языке ε - δ)**.

Число $b \in \mathbb{R}$ называется **пределом функции f** в точке a , если справедливо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in D : \quad 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Этот факт обозначается следующим образом

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad (f(x) \rightarrow b, \quad x \rightarrow a).$$

То же определение **предела функции по Коши**, но на языке окрестностей выглядит так

$$\forall V_b \quad \exists U_a^\circ : \quad f(U_a^\circ \cap D) \subset V_b$$

или

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad f(U_a^\circ(\delta) \cap D) \subset V_b(\varepsilon).$$

Пусть снова задана функция $f : D \rightarrow X \subset \mathbb{R}$ и $a \in D$ — предельная точка D . Следующее определение называется определением **предела функции по Гейне**.

Число $b \in \mathbb{R}$ называется **пределом функции f в точке a** , если выполняется

$$\forall \{x_n\} \subset D \setminus \{a\}, x_n \rightarrow a \ (n \rightarrow \infty) : \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b.$$

Согласно **критерию Гейне определения предела по Коши и по Гейне равносильны**.

Пусть задана функция $f : D \rightarrow X \subset \mathbb{R}$, при этом D не ограничена сверху (снизу, сверху и снизу). Число b называется **пределом функции f на $+\infty$ ($-\infty, \infty$)**, если

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta > 0 \quad \forall x \in D : \quad x > \Delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon \\ (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta > 0 \quad \forall x \in D : \quad x < -\Delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta > 0 \quad \forall x \in D : \quad |x| > \Delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon). \end{aligned}$$

Функция называется **бесконечно большой** при $x \rightarrow a$, если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D : \quad 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x)| > A.$$

Заменяя $|f(x)| > A$ на $f(x) > A$ и $f(x) < -A$ соответственно, получают знакоопределённые бесконечно большие пределы

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty.$$

Аналогично определяются бесконечно большие функции при $x \rightarrow \infty, x \rightarrow \pm\infty$.

Пусть задана функция $f : D \rightarrow X \subset \mathbb{R}$ и a — предельная точка D . Число b называется **правым (левым) пределом функции f в точке a** , если

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D : \quad 0 < x - a < \delta \rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \\ (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D : \quad 0 < a - x < \delta \rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon), \end{aligned}$$

и обозначается

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0) \quad \left(\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0) \right).$$

Правый и левый пределы называются **односторонними пределами**. Справедлив следующий критерий существования предела функции: *функция имеет предел тогда и только тогда, когда оба её односторонних предела существуют, и они равны*.

Решение задач

Задача средняя (6)



Исходя из определения предела функции, доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty.$$

Подсказка

Пользуясь предположением $|x - 1| < \delta$, оцените функцию $\frac{1}{(1-x)^2}$ снизу так, чтобы полученное выражение не зависело от x (а только от δ). Из условия, что значение функции больше E , для всякого произвольного $E > 0$ определите соответствующее число δ . На этом доказательство будет закончено.

Решение:

По определению Коши (на языке $\varepsilon - \delta$) существование предела $\frac{1}{(1-x)^2} \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow 1$ означает следующее

$$\forall E > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D : \quad 0 < |x - 1| < \delta \implies \frac{1}{(x-1)^2} > E.$$

Рассмотрим функцию $\frac{1}{(1-x)^2}$ на всей числовой оси без единицы $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\frac{1}{(1-x)^2} > \frac{1}{\delta^2} > E.$$

Отсюда следует, что в качестве δ можно взять $\delta(E) = \frac{1}{\sqrt{E}}$.

Для наглядности построим график рассматриваемой функции.

Limit $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$ **visualization**

