Theoremsy / Теоре́мзи

Математический анализ

# Определение предела функции

задачи и решения

**Автор:**
Кулаго А. С., ММФ БГУ
andrejs.kulago@icloud.com

**Обновлено:**
26.08.2025

**Ресурс:**
https://theoremsy.com

2025, Харбин

# Теоретическая сводка

*Дорогой читатель, обращаю Ваше внимение на то, что все задачи данного раздела особенно трудные и имеют сугубо теоретическую ценность. Если у Вас не получается разобрать данный материал — не отчаивайтесь, рассмотрите следующие разделы и возвращайтесь к этой теме позднее!*

**Окрестностью точки** $a$ называется любой интервал $U_a = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, содержащий эту точку. Интервал

$$U_a(\varepsilon) \overset{\text{def}}{=} (a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}: \ |x-a| < \varepsilon\}$$

называется **$\varepsilon$-окрестностью точки** $a$. Множество

$$U_a^\circ = U_a \setminus \{a\} \quad (U_a^\circ(\varepsilon) = U_a(\varepsilon) \setminus \{a\})$$

называется **проколотой ($\varepsilon$-) окрестностью точки** $a$.

**Окрестностью бесконечности** $\infty$ называется любое множество

$$U_\infty = (-\infty, \alpha) \cup (\beta, +\infty) \subset \mathbb{R}.$$

Аналогично вводятся **окрестности минус** $(-\infty)$ **и плюс** $(+\infty)$ **бесконечностей**

$$U_{-\infty} = (-\infty, \alpha) \subset \mathbb{R}, \quad U_{+\infty} = (\beta, +\infty) \subset \mathbb{R}.$$

Элемент $a \in D$ называется **предельной точкой** множества $D$, если в любой окрестности этой точки найдётся хоть один элемент из $D$, т. е.

$$\forall U_a \quad \exists x \in D: \quad x \in D.$$

Если точка множества не является предельной, её называют **изолированной**.

Пусть задана некоторая функция $f: D \to X \subset \mathbb{R}$ и $a \in D$ — предельная точка области определения $D$ функции. Следующее определение называется определением **предела функции по Коши (на языке $\varepsilon$–$\delta$)**.

Число $b \in \mathbb{R}$ называется **пределом функции** $f$ в точке $a$, если справедливо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in D: \quad 0 < |x-a| < \delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Этот факт обозначается следующим образом

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad (f(x) \to b, \ x \to a).$$

То же определение **предела функции по Коши**, но **на языке окрестностей** выглядит так

$$\forall V_b \quad \exists U_a^\circ: \quad f(U_a^\circ \cap D) \subset V_b$$

или

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad f(U_a^\circ(\delta) \cap D) \subset V_b(\varepsilon).$$

Пусть снова задана функция $f : D \to X \subset \mathbb{R}$ и $a \in D$ — предельная точка $D$. Следующее определение называется определением **предела функции по Гейне**.

Число $b \in \mathbb{R}$ называется **пределом функции** $f$ в точке $a$, если выполняется

$$\forall \{x_n\} \subset D \setminus \{a\}, \ x_n \to a \ (n \to \infty): \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b.$$

Согласно **критерию Гейне** *определения предела по Коши и по Гейне равносильны.*

Пусть задана функция $f : D \to X \subset \mathbb{R}$, при этом $D$ не ограничена сверху (снизу, сверху и снизу). Число $b$ называется **пределом функции $f$ на $+\infty$ $(-\infty, \ \infty)$**, если

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad x > \Delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon \\ \big(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad x < -\Delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad |x| > \Delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon\big).\end{gathered}$$

Функция называется **бесконечно большой** при $x \to a$, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \overset{\text{def}}{\iff} \forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x)| > A.$$

Заменяя $|f(x)| > A$ на $f(x) > A$ и $f(x) < -A$ соответственно, получают знакоопределённые бесконечно большие пределы

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

Аналогично определяются бесконечно большие функции при $x \to \infty$, $x \to \pm\infty$.

Пусть задана функция $f : D \to X \subset \mathbb{R}$ и $a$ — предельная точка $D$. Число $b$ называется **правым (левым) пределом функции $f$ в точке** $a$, если

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad 0 < x - a < \delta \to |f(x) - b| < \varepsilon \\ \big(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad 0 < a - x < \delta \to |f(x) - b| < \varepsilon\big),\end{gathered}$$

и обозначается

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a+0) \quad \Big(\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a-0)\Big).$$

Правый и левый пределы называются **односторонними пределами**. Справедлив следующий критерий существования предела функции: *функция имеет предел тогда и только тогда, когда оба её односторонних предела существуют, и они равны.*

# Решение задач

**Задача средняя (3)**

Исходя из определения предела функции, доказать, что

$$\lim_{x\to -3} \frac{x+3}{\sin x + 2} = 0.$$

**Подсказка**

Рассмотрите модуль разности функции и её предельного значения. Пользуясь предположением $0 < |x+3| < \delta$, оцените его сверху так, чтобы полученное выражение не зависело от $x$ (а только от $\delta$). Из условия, что оценка модуля разности меньше $\varepsilon$, для всякого произвольного $\varepsilon > 0$ определите соответствующее число $\delta$. На этом доказательство будет закончено.

**Решение:**

По определению Коши (на языке $\varepsilon - \delta$) существование предела $\frac{x+3}{\sin x+2} \to 0,\ x \to -3$ означает следующее

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad 0 < |x+3| < \delta \implies \left| \frac{x+3}{\sin x + 2} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Рассмотрим модуль разности функции и её предела

$$\left| \frac{x+3}{\sin x + 2} \right| < |x+3| < \delta < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что в качестве $\delta$ можно взять $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$.

Для наглядности построим график рассматриваемой функции.

**Limit** $\lim_{x\to -3} \frac{x+3}{\sin x+2} = 0$ **visualization**