



---

THEOREMSY / ТЕОРЕМЗИ

---

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

---

# Определение предела функции

---

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

**Автор:**

Кулаго А. С., ММФ БГУ  
andrejs.kulago@icloud.com

**Обновлено:**

26.08.2025

**Ресурс:**

<https://theoremsy.com>

2025, Харбин

## Теоретическая сводка

Дорогой читатель, обращаю Ваше внимание на то, что все задачи данного раздела особенно трудные и имеют сугубо теоретическую ценность. Если у Вас не получается разобрать данный материал — не отчаивайтесь, рассмотрите следующие разделы и возвращайтесь к этой теме позднее!

**Окрестностью точки  $a$**  называется любой интервал  $U_a = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ , содержащий эту точку. Интервал

$$U_a(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$$

называется  **$\varepsilon$ -окрестностью точки  $a$** . Множество

$$U_a^\circ = U_a \setminus \{a\} \quad (U_a^\circ(\varepsilon) = U_a(\varepsilon) \setminus \{a\})$$

называется **проколотой ( $\varepsilon$ -) окрестностью точки  $a$** .

**Окрестностью бесконечности  $\infty$**  называется любое множество

$$U_\infty = (-\infty, \alpha) \cup (\beta, +\infty) \subset \mathbb{R}.$$

Аналогично вводятся **окрестности минус ( $-\infty$ ) и плюс ( $+\infty$ ) бесконечностей**

$$U_{-\infty} = (-\infty, \alpha) \subset \mathbb{R}, \quad U_{+\infty} = (\beta, +\infty) \subset \mathbb{R}.$$

Элемент  $a \in D$  называется **предельной точкой** множества  $D$ , если в любой окрестности этой точки найдётся хоть один элемент из  $D$ , т. е.

$$\forall U_a \quad \exists x \in D : x \in D.$$

Если точка множества не является предельной, её называют **изолированной**.

Пусть задана некоторая функция  $f : D \rightarrow X \subset \mathbb{R}$  и  $a \in D$  — предельная точка области определения  $D$  функции. Следующее определение называется определением **предела функции по Коши (на языке  $\varepsilon$ - $\delta$ )**.

Число  $b \in \mathbb{R}$  называется **пределом функции  $f$**  в точке  $a$ , если справедливо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in D : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Этот факт обозначается следующим образом

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad (f(x) \rightarrow b, x \rightarrow a).$$

То же определение **предела функции по Коши**, но на языке **окрестностей** выглядит так

$$\forall V_b \quad \exists U_a^\circ : f(U_a^\circ \cap D) \subset V_b$$

или

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : f(U_a^\circ(\delta) \cap D) \subset V_b(\varepsilon).$$

Пусть снова задана функция  $f : D \rightarrow X \subset \mathbb{R}$  и  $a \in D$  — предельная точка  $D$ . Следующее определение называется определением **предела функции по Гейне**.

Число  $b \in \mathbb{R}$  называется **пределом функции  $f$**  в точке  $a$ , если выполняется

$$\forall \{x_n\} \subset D \setminus \{a\}, x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty) : \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b.$$

Согласно **критерию Гейне** определения предела по Коши и по Гейне равносильны.

Пусть задана функция  $f : D \rightarrow X \subset \mathbb{R}$ , при этом  $D$  не ограничена сверху (снизу, сверху и снизу). Число  $b$  называется **пределом функции  $f$  на  $+\infty$  ( $-\infty, \infty$ )**, если

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta > 0 \quad \forall x \in D : \quad x > \Delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon \\ (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta > 0 \quad \forall x \in D : \quad x < -\Delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta > 0 \quad \forall x \in D : \quad |x| > \Delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon). \end{aligned}$$

Функция называется **бесконечно большой** при  $x \rightarrow a$ , если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D : \quad 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x)| > A.$$

Заменяя  $|f(x)| > A$  на  $f(x) > A$  и  $f(x) < -A$  соответственно, получают знакоопределённые бесконечно большие пределы

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty.$$

Аналогично определяются бесконечно большие функции при  $x \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Пусть задана функция  $f : D \rightarrow X \subset \mathbb{R}$  и  $a$  — предельная точка  $D$ . Число  $b$  называется **правым (левым) пределом функции  $f$  в точке  $a$** , если

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D : \quad 0 < x - a < \delta \rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \\ (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D : \quad 0 < a - x < \delta \rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon), \end{aligned}$$

и обозначается

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0) \quad \left( \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0) \right).$$

Правый и левый пределы называются **односторонними пределами**. Справедлив следующий критерий существования предела функции: *функция имеет предел тогда и только тогда, когда оба её односторонних предела существуют, и они равны*.

## Решение задач

## Задача средняя (2)



Исходя из определения предела функции, доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9.$$

## Подсказка

Рассмотрите модуль разности функции и её предельного значения. Пользуясь предположением  $0 < |x - 3| < \delta$  и свойствами модуля, оцените его сверху так, чтобы полученная оценка не зависела от  $x$  (а только от  $\delta$ ). Далее найдите диапазон возможных значений  $\delta$  (этот диапазон зависит от  $\varepsilon$ ) из условия, что полученная ранее оценка модуля разности меньше  $\varepsilon$ . Выбрав любое  $\delta$  из найденного интервала, доказательство будет закончено.

## Решение:

По определению Коши (на языке  $\varepsilon - \delta$ ) существование предела  $x^2 \rightarrow 9$ ,  $x \rightarrow 3$  означает следующее

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D : \quad 0 < |x - 3| < \delta \implies |x^2 - 9| < \varepsilon.$$

Рассмотрим модуль разности функции и её предела

$$\begin{aligned} |x^2 - 9| &= |x - 3| \cdot |x + 3| = \\ &= |x - 3| \cdot |x - 3 + 6| < \\ &< |x - 3| \cdot (|x - 3| + 6) < \\ &< \delta \cdot (\delta + 6) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Решая неравенство  $\delta^2 + 6\delta - \varepsilon < 0$ , получим, что для выполнения условия  $|x^2 - 9| < \varepsilon$ , достаточно взять

$$\frac{-6 - \sqrt{6^2 + 4\varepsilon}}{2} < \delta < \frac{-6 + \sqrt{6^2 + 4\varepsilon}}{2}.$$

Найденный диапазон вместе с требованием  $\delta > 0$  даёт нам искомое

$$\delta = \sqrt{9 + \varepsilon} - 3,$$

хотя в качестве  $\delta$  вообще можно выбрать любое число из интервала  $(0, \sqrt{9 + \varepsilon} - 3)$ .

Для наглядности построим график рассматриваемой функции.

**Limit  $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$  visualization**

