Theoremsy / Теоре́мзи

Математический анализ

Определение предела функции

задачи и решения

Автор:
Кулаго А. С., ММФ БГУ
andrejs.kulago@icloud.com

Обновлено:
26.08.2025

Ресурс:
https://theoremsy.com

2025, Харбин

Теоретическая сводка

Дорогой читатель, обращаю Ваше внимение на то, что все задачи данного раздела особенно трудные и имеют сугубо теоретическую ценность. Если у Вас не получается разобрать данный материал — не отчаивайтесь, рассмотрите следующие разделы и возвращайтесь к этой теме позднее!

Окрестностью точки a называется любой интервал $U_a = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, содержащий эту точку. Интервал

$$U_a(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} (a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : \ |x-a| < \varepsilon\}$$

называется **ε-окрестностью точки** a. Множество

$$U_a^\circ = U_a \setminus \{a\} \quad (U_a^\circ(\varepsilon) = U_a(\varepsilon) \setminus \{a\})$$

называется **проколотой (ε-) окрестностью точки** a.

Окрестностью бесконечности ∞ называется любое множество

$$U_\infty = (-\infty, \alpha) \cup (\beta, +\infty) \subset \mathbb{R}.$$

Аналогично вводятся **окрестности минус $(-\infty)$ и плюс $(+\infty)$ бесконечностей**

$$U_{-\infty} = (-\infty, \alpha) \subset \mathbb{R}, \quad U_{+\infty} = (\beta, +\infty) \subset \mathbb{R}.$$

Элемент $a \in D$ называется **предельной точкой** множества D, если в любой окрестности этой точки найдётся хоть один элемент из D, т. е.

$$\forall U_a \quad \exists x \in D : \quad x \in D.$$

Если точка множества не является предельной, её называют **изолированной**.

Пусть задана некоторая функция $f : D \to X \subset \mathbb{R}$ и $a \in D$ — предельная точка области определения D функции. Следующее определение называется определением **предела функции по Коши (на языке ε–δ)**.

Число $b \in \mathbb{R}$ называется **пределом функции** f в точке a, если справедливо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in D : \quad 0 < |x-a| < \delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Этот факт обозначается следующим образом

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad (f(x) \to b, \ x \to a).$$

То же определение **предела функции по Коши**, но **на языке окрестностей** выглядит так

$$\forall V_b \quad \exists U_a^\circ : \quad f(U_a^\circ \cap D) \subset V_b$$

или

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad f(U_a^\circ(\delta) \cap D) \subset V_b(\varepsilon).$$

Пусть снова задана функция $f : D \to X \subset \mathbb{R}$ и $a \in D$ — предельная точка D. Следующее определение называется определением **предела функции по Гейне**.

Число $b \in \mathbb{R}$ называется **пределом функции** f в точке a, если выполняется

$$\forall \{x_n\} \subset D \setminus \{a\}, \ x_n \to a \ (n \to \infty) : \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b.$$

Согласно **критерию Гейне** *определения предела по Коши и по Гейне равносильны.*

Пусть задана функция $f : D \to X \subset \mathbb{R}$, при этом D не ограничена сверху (снизу, сверху и снизу). Число b называется **пределом функции f на $+\infty$ ($-\infty$, ∞)**, если

$$\begin{aligned}
&\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta > 0 \quad \forall x \in D : \quad x > \Delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon \\
&\big(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta > 0 \quad \forall x \in D : \quad x < -\Delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon, \\
&\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta > 0 \quad \forall x \in D : \quad |x| > \Delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon\big).
\end{aligned}$$

Функция называется **бесконечно большой** при $x \to a$, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \overset{\text{def}}{\iff} \forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D : \quad 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x)| > A.$$

Заменяя $|f(x)| > A$ на $f(x) > A$ и $f(x) < -A$ соответственно, получают знакоопределённые бесконечно большие пределы

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

Аналогично определяются бесконечно большие функции при $x \to \infty$, $x \to \pm\infty$.

Пусть задана функция $f : D \to X \subset \mathbb{R}$ и a — предельная точка D. Число b называется **правым (левым) пределом функции f в точке a**, если

$$\begin{aligned}
&\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D : \quad 0 < x - a < \delta \to |f(x) - b| < \varepsilon \\
&\big(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D : \quad 0 < a - x < \delta \to |f(x) - b| < \varepsilon\big),
\end{aligned}$$

и обозначается

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a+0) \quad \Big(\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a-0)\Big).$$

Правый и левый пределы называются **односторонними пределами**. Справедлив следующий критерий существования предела функции: *функция имеет предел тогда и только тогда, когда оба её односторонних предела существуют, и они равны.*

Решение задач

Задача средняя (1)

Сформулировать следующие утверждения в соответствии с определением предела по Коши (на языке $\varepsilon - \delta$ и на языке окрестностей) и по Гейне

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$,
2) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b$,
3) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b$,
4) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = b$,
5) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = b$,
6) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = b$,
7) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$,
8) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$,
9) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$,
10) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$,
11) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = -\infty$,
12) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = +\infty$,
13) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$,
14) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = -\infty$,
15) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = +\infty$,
16) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \infty$,
17) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = -\infty$,
18) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = +\infty$,
19) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \infty$,
20) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$,
21) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$,
22) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \infty$,
23) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$,
24) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

Для каждого из случаев привести пример.

Подсказка

При рассмотрении определений односторонних пределов по Коши на языке окрестностей, сузьте область определения D функции f до множеств

$$D_{a-} = D \cap (-\infty, a), \quad D_{a+} = D \cap (a, +\infty).$$

В случае бесконечного возрастания аргумента и/или функции при формулировке определения на языке окрестностей воспользуйтесь окрестностями бесконечностей $U_\infty,\ U_{-\infty}, U_{+\infty}$.

Решение:

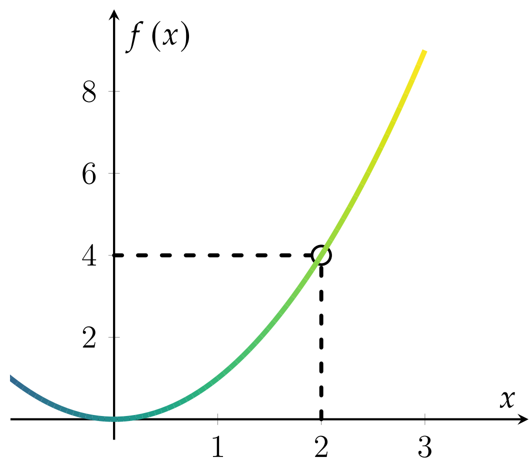
Для удобства введём обозначения

$$D_{a-} = D \cap (-\infty, a), \quad D_{a+} = D \cap (a, +\infty).$$

1. $f(x) \to b,\ x \to a$:

$$\begin{aligned} \varepsilon-\delta: &\quad \forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad \forall x \in D: \quad 0<|x-a|<\delta \implies |f(x)-b|<\varepsilon, \\ U_a: &\quad \forall V_b \quad \exists \overset{\circ}{U}_a: \quad f(\overset{\circ}{U}_a \cap D) \subset V_b, \\ \text{Heine}: &\quad \forall \{x_n\} \subset D \setminus \{a\},\ x_n \to a\ (n \to \infty): \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b, \\ \text{example}: &\quad \lim_{x\to 2} x^2 = 4; \end{aligned}$$

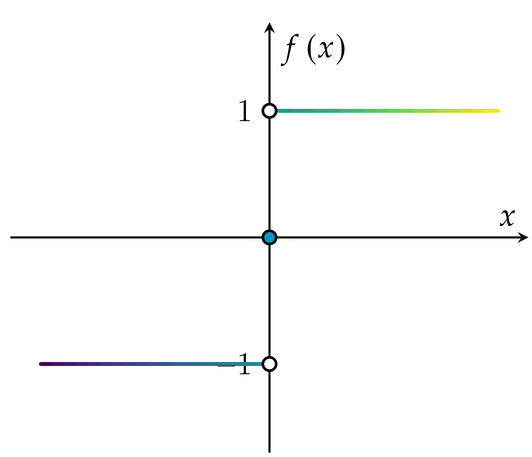
Function $f(x) = x^2$ plot



2. $f(x) \to b,\ x \to a-0$:

$$\begin{aligned} \varepsilon-\delta: &\quad \forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad \forall x \in D: \quad 0<a-x<\delta \implies |f(x)-b|<\varepsilon, \\ U_a: &\quad \forall V_b \quad \exists U_a: \quad f(U_a \cap D_{a-}) \subset V_b, \\ \text{Heine}: &\quad \forall \{x_n\} \subset D_{a-},\ x_n \to a\ (n \to \infty): \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b, \\ \text{example}: &\quad \lim_{x\to -0} \operatorname{sign} x = -1; \end{aligned}$$

Function $f(x) = \text{sign}\ x$ plot



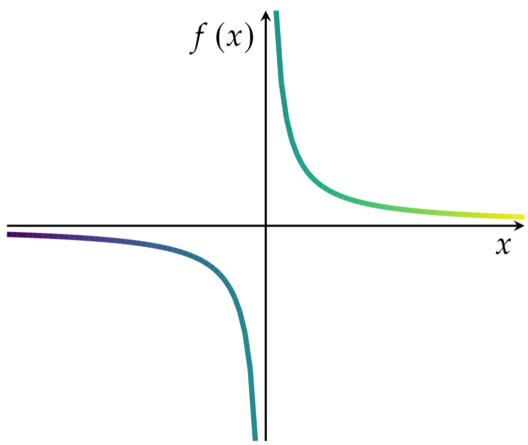
3. $f(x) \to b, \ x \to a+0$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon - \delta: &\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad 0 < x - a < \delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon, \\
U_a: &\quad \forall V_b \quad \exists U_a: \quad f(U_a \cap D_{a+}) \subset V_b, \\
\text{Heine}: &\quad \forall \{x_n\} \subset D_{a+}, \ x_n \to a \ (n \to \infty): \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b, \\
\text{example}: &\quad \lim_{x\to+0} \text{sign } x = 1;
\end{aligned}$$

4. $f(x) \to b, \ x \to \infty$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon - \delta: &\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad |x| > \Delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon, \\
U_a: &\quad \forall V_b \quad \exists U_\infty: \quad f(U_\infty \cap D) \subset V_b, \\
\text{Heine}: &\quad \forall \{x_n\} \subset D, \ x_n \to \infty \ (n \to \infty): \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b, \\
\text{example}: &\quad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0;
\end{aligned}$$

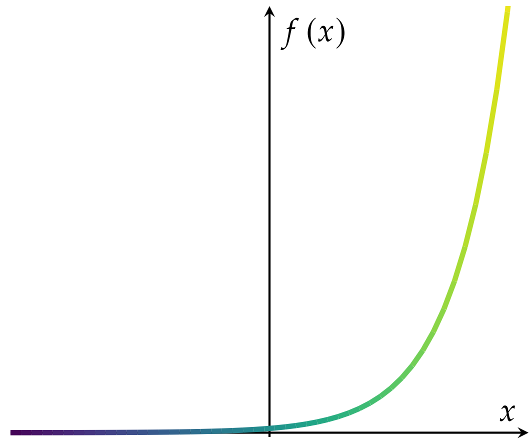
Function $f(x) = \frac{1}{x}$ plot



5. $f(x) \to b, \ x \to -\infty$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon - \delta: &\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad x < -\Delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon, \\
U_a: &\quad \forall V_b \quad \exists U_{-\infty}: \quad f(U_{-\infty} \cap D) \subset V_b, \\
\text{Heine}: &\quad \forall \{x_n\} \subset D, \ x_n \to -\infty \ (n \to \infty): \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b, \\
\text{example}: &\quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0;
\end{aligned}$$

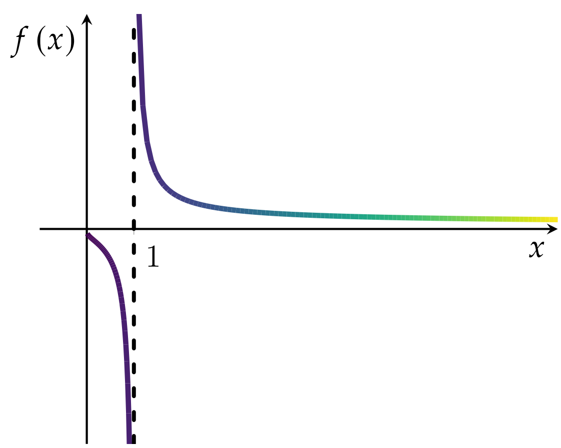
Function $f(x) = e^x$ plot



6. $f(x) \to b,\ x \to +\infty$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon - \delta: &\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad x > \Delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon, \\
U_a: &\quad \forall V_b \quad \exists U_{+\infty}: \quad f(U_{+\infty} \cap D) \subset V_b, \\
\text{Heine}: &\quad \forall \{x_n\} \subset D,\ x_n \to +\infty\ (n \to \infty): \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b, \\
\text{example}: &\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} = 0;
\end{aligned}$$

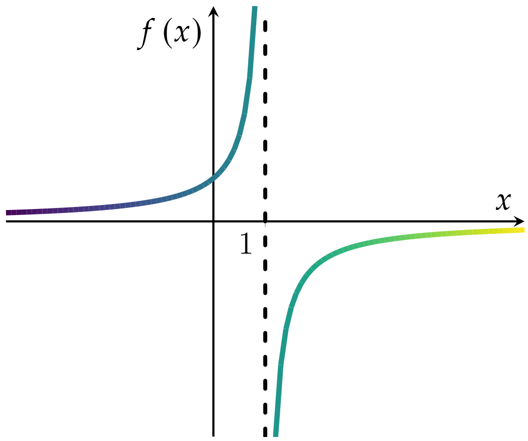
Function $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ plot



7. $f(x) \to \infty,\ x \to a$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon - \delta: &\quad \forall E > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x)| > E, \\
U_a: &\quad \forall V_\infty \quad \exists U_a^\circ: \quad f(U_a^\circ \cap D) \subset V_\infty, \\
\text{Heine}: &\quad \forall \{x_n\} \subset D \setminus \{a\},\ x_n \to a\ (n \to \infty): \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty, \\
\text{example}: &\quad \lim_{x\to 1} \frac{1}{1 - x} = \infty;
\end{aligned}$$

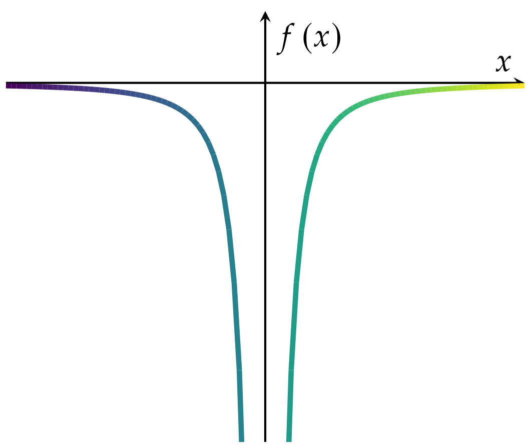
Function $f(x) = \frac{1}{1-x}$ plot



8. $f(x) \to -\infty,\ x \to a$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon - \delta: &\quad \forall E > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad 0 < |x - a| < \delta \implies f(x) < -E, \\
U_a: &\quad \forall V_{-\infty} \quad \exists U_a^\circ: \quad f(U_a^\circ \cap D) \subset V_{-\infty}, \\
\text{Heine}: &\quad \forall \{x_n\} \subset D \setminus \{a\},\ x_n \to a\ (n \to \infty): \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = -\infty, \\
\text{example}: &\quad \lim_{x \to 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty;
\end{aligned}$$

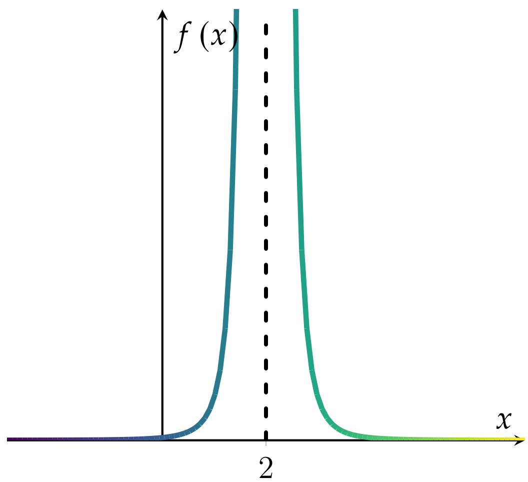
Function $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ plot



9. $f(x) \to +\infty,\ x \to a$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon - \delta: &\quad \forall E > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad 0 < |x - a| < \delta \implies f(x) > E, \\
U_a: &\quad \forall V_{+\infty} \quad \exists U_a^\circ: \quad f(U_a^\circ \cap D) \subset V_{+\infty}, \\
\text{Heine}: &\quad \forall \{x_n\} \subset D \setminus \{a\},\ x_n \to a\ (n \to \infty): \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = +\infty, \\
\text{example}: &\quad \lim_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)^4} = +\infty;
\end{aligned}$$

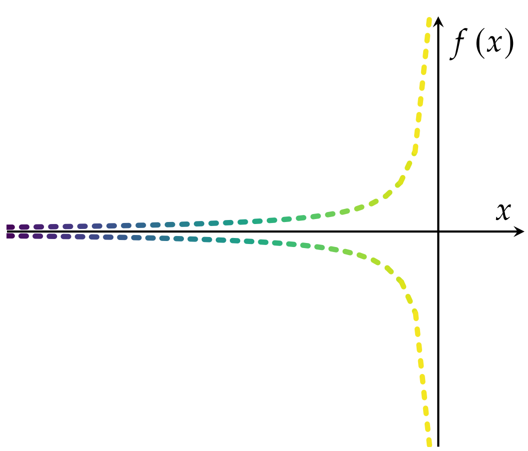
Function $f(x) = \frac{1}{(x-2)^4}$ plot



10. $f(x) \to \infty,\ x \to a-0$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon-\delta: &\quad \forall E>0 \quad \exists \delta>0 \quad \forall x \in D: \quad 0<a-x<\delta \implies |f(x)|>E,\\
U_a: &\quad \forall V_\infty \quad \exists U_a: \quad f(U_a \cap D_{a-}) \subset V_\infty,\\
\text{Heine}: &\quad \forall \{x_n\} \subset D_{a-},\ x_n \to a\ (n\to\infty): \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty,\\
\text{example}: &\quad \lim_{x\to-0} \frac{1}{x} \cdot Q(x) = \infty, \quad Q(x) = \begin{cases} -1, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases};
\end{aligned}$$

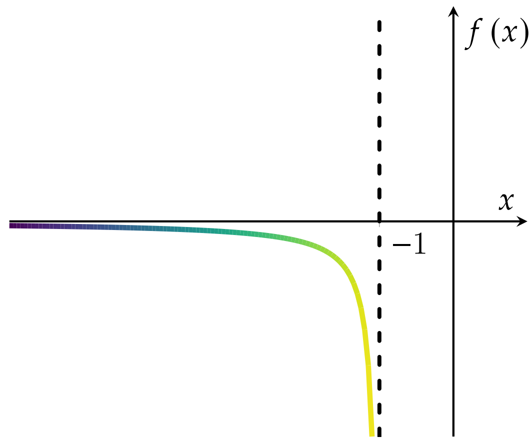
Function $f(x) = \frac{1}{x} \cdot Q(x)$ plot



11. $f(x) \to -\infty,\ x \to a-0$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon-\delta: &\quad \forall E>0 \quad \exists \delta>0 \quad \forall x \in D: \quad 0<a-x<\delta \implies f(x)<-E,\\
U_a: &\quad \forall V_{-\infty} \quad \exists U_a: \quad f(U_a \cap D_{a-}) \subset V_{-\infty},\\
\text{Heine}: &\quad \forall \{x_n\} \subset D_{a-},\ x_n \to a\ (n\to\infty): \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty,\\
\text{example}: &\quad \lim_{x\to-1-0} \frac{1}{x+1} = -\infty;
\end{aligned}$$

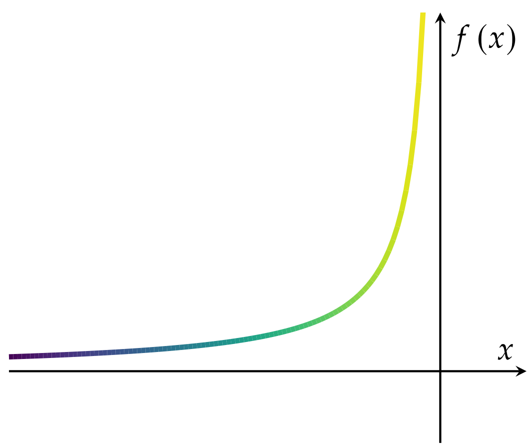
Function $f(x) = \frac{1}{x+1}$ plot



12. $f(x) \longrightarrow +\infty,\ x \longrightarrow a-0$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon-\delta:&\quad \forall E>0\quad \exists\delta>0\quad \forall x\in D:\quad 0<a-x<\delta \implies f(x)>E,\\
U_a:&\quad \forall V_{+\infty}\quad \exists U_a:\quad f(U_a\cap D_{a-})\subset V_{+\infty},\\
\text{Heine}:&\quad \forall\{x_n\}\subset D_{a-},\ x_n\longrightarrow a\ \ (n\longrightarrow\infty):\quad \lim_{n\to\infty} f(x_n)=+\infty,\\
\text{example}:&\quad \lim_{x\to-0} -\frac{1}{x}=+\infty;
\end{aligned}$$

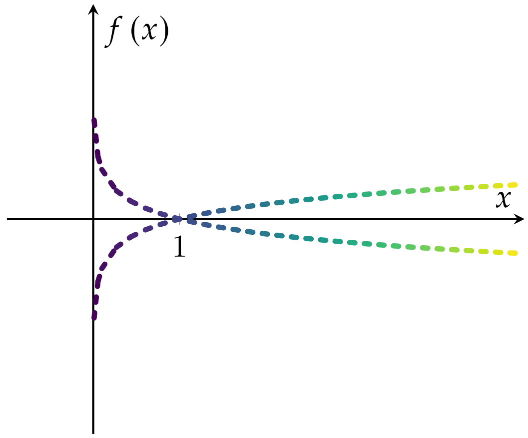
Function $f(x) = -\frac{1}{x}$ plot



13. $f(x) \longrightarrow \infty,\ x \longrightarrow a+0$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon-\delta:&\quad \forall E>0\quad \exists\delta>0\quad \forall x\in D:\quad 0<x-a<\delta \implies |f(x)|>E,\\
U_a:&\quad \forall V_{\infty}\quad \exists U_a:\quad f(U_a\cap D_{a+})\subset V_{\infty},\\
\text{Heine}:&\quad \forall\{x_n\}\subset D_{a+},\ x_n\longrightarrow a\ \ (n\longrightarrow\infty):\quad \lim_{n\to\infty} f(x_n)=\infty,\\
\text{example}:&\quad \lim_{x\to+0} \ln(x)\cdot Q(x)=\infty,\quad Q(x)=\begin{cases}-1, & x\in\mathbb{Q}\\ 1, & x\in\mathbb{I}=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases};
\end{aligned}$$

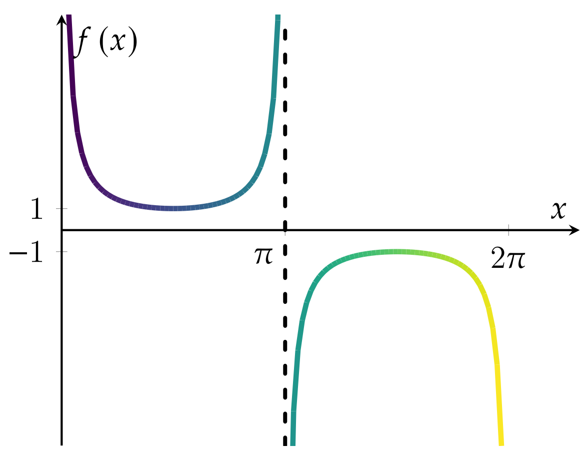
Function $f(x) = \ln(x) \cdot Q(x)$ plot



14. $f(x) \to -\infty,\ x \to a+0$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon - \delta: &\quad \forall E > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad 0 < x - a < \delta \implies f(x) < -E,\\
U_a: &\quad \forall V_{-\infty} \quad \exists U_a: \quad f(U_a \cap D_{a+}) \subset V_{-\infty},\\
\text{Heine}: &\quad \forall \{x_n\} \subset D_{a+},\ x_n \to a \ (n \to \infty): \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty,\\
\text{example}: &\quad \lim_{x\to\pi+0} \frac{1}{\sin x} = -\infty;
\end{aligned}$$

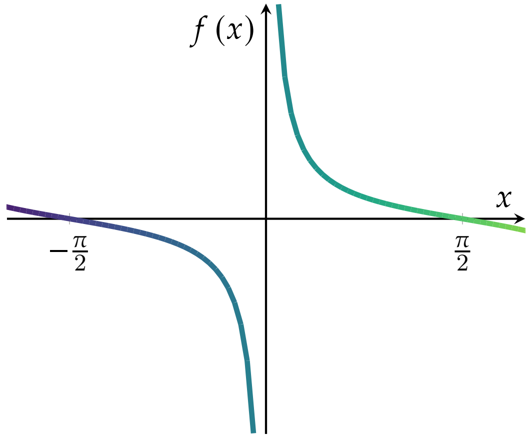
Function $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ plot



15. $f(x) \to +\infty,\ x \to a+0$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon - \delta: &\quad \forall E > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad 0 < x - a < \delta \implies f(x) > E,\\
U_a: &\quad \forall V_{+\infty} \quad \exists U_a: \quad f(U_a \cap D_{a+}) \subset V_{+\infty},\\
\text{Heine}: &\quad \forall \{x_n\} \subset D_{a+},\ x_n \to a \ (n \to \infty): \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty,\\
\text{example}: &\quad \lim_{x\to+0} \operatorname{ctg} x = +\infty;
\end{aligned}$$

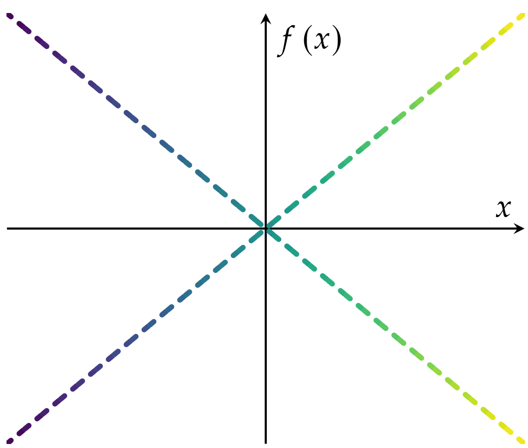
Function $f(x) = \operatorname{ctg} x$ plot



16. $f(x) \to \infty,\ x \to \infty$:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon - \delta: &\quad \forall E > 0 \quad \exists \Delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad |x| > \Delta \implies |f(x)| > E,\\
U_a: &\quad \forall V_\infty \quad \exists U_\infty: \quad f(U_\infty \cap D) \subset V_\infty,\\
\text{Heine}: &\quad \forall \{x_n\} \subset D,\ x_n \to \infty\ (n \to \infty): \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty,\\
\text{example}: &\quad \lim_{x\to\infty} x \cdot Q(x) = \infty, \quad Q(x) = \begin{cases} -1, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases};
\end{aligned}
$$

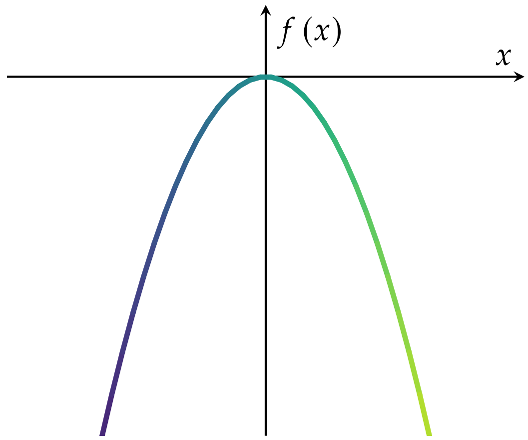
Function $f(x) = x \cdot Q(x)$ plot



17. $f(x) \to -\infty,\ x \to \infty$:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon - \delta: &\quad \forall E > 0 \quad \exists \Delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad |x| > \Delta \implies f(x) < -E,\\
U_a: &\quad \forall V_{-\infty} \quad \exists U_\infty: \quad f(U_\infty \cap D) \subset V_{-\infty},\\
\text{Heine}: &\quad \forall \{x_n\} \subset D,\ x_n \to \infty\ (n \to \infty): \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty,\\
\text{example}: &\quad \lim_{x\to\infty} -x^2 = -\infty;
\end{aligned}
$$

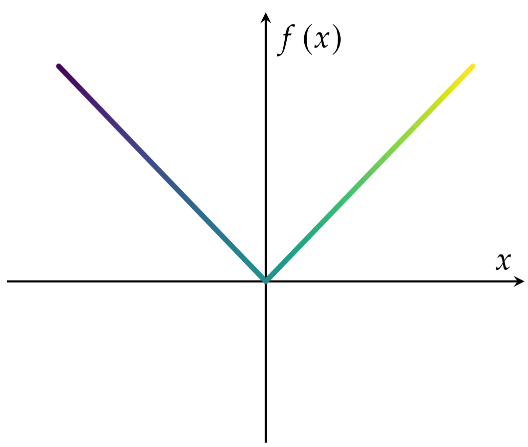
Function $f(x) = -x^2$ plot



18. $f(x) \to +\infty,\ x \to \infty$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon - \delta: &\quad \forall E > 0 \quad \exists \Delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad |x| > \Delta \implies f(x) > E,\\
U_a: &\quad \forall V_{+\infty} \quad \exists U_\infty: \quad f(U_\infty \cap D) \subset V_{+\infty},\\
\text{Heine}: &\quad \forall \{x_n\} \subset D,\ x_n \to \infty\ (n \to \infty): \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty,\\
\text{example}: &\quad \lim_{x\to\infty} |x| = +\infty;
\end{aligned}$$

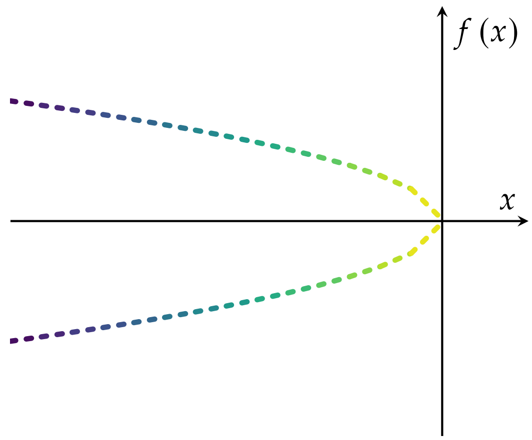
Function $f(x) = |x|$ plot



19. $f(x) \to \infty,\ x \to -\infty$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon - \delta: &\quad \forall E > 0 \quad \exists \Delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad x < -\Delta \implies |f(x)| > E,\\
U_a: &\quad \forall V_{\infty} \quad \exists U_{-\infty}: \quad f(U_{-\infty} \cap D) \subset V_{\infty},\\
\text{Heine}: &\quad \forall \{x_n\} \subset D,\ x_n \to -\infty\ (n \to \infty): \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty,\\
\text{example}: &\quad \lim_{x\to-\infty} \sqrt{-x}\cdot Q(x) = \infty, \quad Q(x) = \begin{cases} -1, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases};
\end{aligned}$$

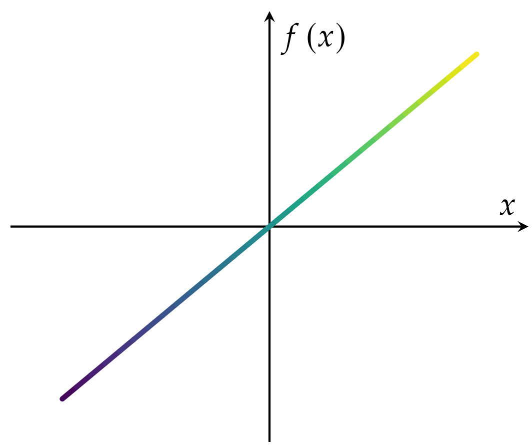
Function $f(x) = \sqrt{-x} \cdot Q(x)$ plot



20. $f(x) \longrightarrow -\infty, \; x \longrightarrow -\infty$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon - \delta: &\quad \forall E > 0 \quad \exists \Delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad x < -\Delta \implies f(x) < -E,\\
U_a: &\quad \forall V_{-\infty} \quad \exists U_{-\infty}: \quad f(U_{-\infty} \cap D) \subset V_{-\infty},\\
\text{Heine}: &\quad \forall \{x_n\} \subset D, \; x_n \longrightarrow -\infty \; (n \longrightarrow \infty): \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty,\\
\text{example}: &\quad \lim_{x\to-\infty} x = -\infty;
\end{aligned}$$

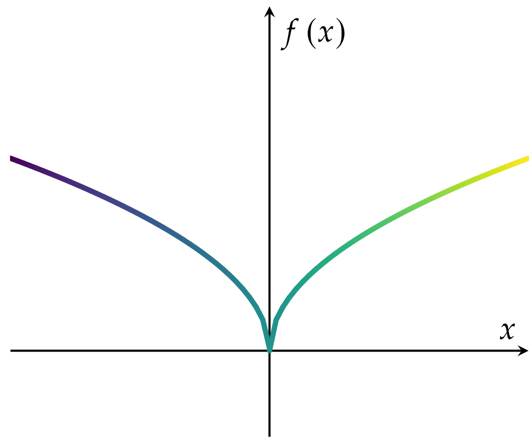
Function $f(x) = x$ plot



21. $f(x) \longrightarrow +\infty, \; x \longrightarrow -\infty$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon - \delta: &\quad \forall E > 0 \quad \exists \Delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad x < -\Delta \implies f(x) > E,\\
U_a: &\quad \forall V_{+\infty} \quad \exists U_{-\infty}: \quad f(U_{-\infty} \cap D) \subset V_{+\infty},\\
\text{Heine}: &\quad \forall \{x_n\} \subset D, \; x_n \longrightarrow -\infty \; (n \longrightarrow \infty): \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty,\\
\text{example}: &\quad \lim_{x\to-\infty} \sqrt{|x|} = +\infty;
\end{aligned}$$

Function $f(x) = \sqrt{|x|}$ plot



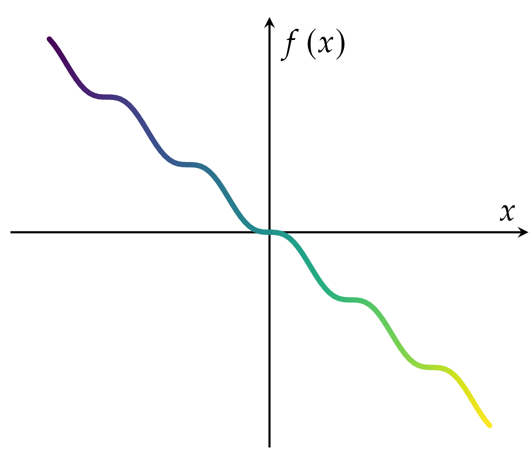
22. $f(x) \to \infty,\ x \to +\infty$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon - \delta: &\quad \forall E > 0 \quad \exists \Delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad x > \Delta \implies |f(x)| > E,\\
U_a: &\quad \forall V_\infty \quad \exists U_{+\infty}: \quad f(U_{+\infty} \cap D) \subset V_\infty,\\
\text{Heine}: &\quad \forall \{x_n\} \subset D,\ x_n \to +\infty\ (n \to \infty): \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty,\\
\text{example}: &\quad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) \cdot Q(x) = \infty, \quad Q(x) = \begin{cases} -1, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases};
\end{aligned}$$

23. $f(x) \to -\infty,\ x \to +\infty$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon - \delta: &\quad \forall E > 0 \quad \exists \Delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad x > \Delta \implies f(x) < -E,\\
U_a: &\quad \forall V_{-\infty} \quad \exists U_{+\infty}: \quad f(U_{+\infty} \cap D) \subset V_{-\infty},\\
\text{Heine}: &\quad \forall \{x_n\} \subset D,\ x_n \to +\infty\ (n \to \infty): \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty,\\
\text{example}: &\quad \lim_{x\to+\infty} -x + \sin x = -\infty;
\end{aligned}$$

Function $f(x) = -x + \sin x$ plot



24. $f(x) \to +\infty,\ x \to +\infty$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon - \delta: &\quad \forall E > 0 \quad \exists \Delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad x > \Delta \implies f(x) > E, \\
U_a: &\quad \forall V_{+\infty} \quad \exists U_{+\infty}: \quad f(U_{+\infty} \cap D) \subset V_{+\infty}, \\
\text{Heine}: &\quad \forall \{x_n\} \subset D,\ x_n \to +\infty\ (n \to \infty): \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty, \\
\text{example}: &\quad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty;
\end{aligned}$$