**Theoremsy / Теоре́мзи**

Математический анализ

# Определение предела функции

задачи и решения

**Автор:**
Кулаго А. С., ММФ БГУ
andrejs.kulago@icloud.com

**Обновлено:**
26.08.2025

**Ресурс:**
https://theoremsy.com

2025, Харбин

# Теоретическая сводка

*Дорогой читатель, обращаю Ваше внимание на то, что все задачи данного раздела особенно трудные и имеют сугубо теоретическую ценность. Если у Вас не получается разобрать данный материал — не отчаивайтесь, рассмотрите следующие разделы и возвращайтесь к этой теме позднее!*

**Окрестностью точки** $a$ называется любой интервал $U_a = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, содержащий эту точку. Интервал

$$U_a(\varepsilon) \overset{\text{def}}{=} (a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : \ |x-a| < \varepsilon\}$$

называется **$\varepsilon$-окрестностью точки** $a$. Множество

$$U_a^\circ = U_a \setminus \{a\} \quad (U_a^\circ(\varepsilon) = U_a(\varepsilon) \setminus \{a\})$$

называется **проколотой ($\varepsilon$-) окрестностью точки** $a$.

**Окрестностью бесконечности** $\infty$ называется любое множество

$$U_\infty = (-\infty, \alpha) \cup (\beta, +\infty) \subset \mathbb{R}.$$

Аналогично вводятся **окрестности минус** $(-\infty)$ **и плюс** $(+\infty)$ **бесконечностей**

$$U_{-\infty} = (-\infty, \alpha) \subset \mathbb{R}, \quad U_{+\infty} = (\beta, +\infty) \subset \mathbb{R}.$$

Элемент $a \in D$ называется **предельной точкой** множества $D$, если в любой окрестности этой точки найдётся хоть один элемент из $D$, т. е.

$$\forall U_a \quad \exists x \in D : \quad x \in D.$$

Если точка множества не является предельной, её называют **изолированной**.

Пусть задана некоторая функция $f : D \to X \subset \mathbb{R}$ и $a \in D$ — предельная точка области определения $D$ функции. Следующее определение называется определением **предела функции по Коши (на языке $\varepsilon$–$\delta$)**.

Число $b \in \mathbb{R}$ называется **пределом функции** $f$ в точке $a$, если справедливо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in D : \quad 0 < |x-a| < \delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Этот факт обозначается следующим образом

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad (f(x) \to b, \ x \to a).$$

То же определение **предела функции по Коши**, но **на языке окрестностей** выглядит так

$$\forall V_b \quad \exists U_a^\circ : \quad f(U_a^\circ \cap D) \subset V_b$$

или

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad f(U_a^\circ(\delta) \cap D) \subset V_b(\varepsilon).$$

Пусть снова задана функция $f : D \to X \subset \mathbb{R}$ и $a \in D$ — предельная точка $D$. Следующее определение называется определением **предела функции по Гейне**.

Число $b \in \mathbb{R}$ называется **пределом функции** $f$ в точке $a$, если выполняется

$$\forall \{x_n\} \subset D \setminus \{a\}, \ x_n \to a \ (n \to \infty): \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b.$$

Согласно **критерию Гейне** *определения предела по Коши и по Гейне равносильны.*

Пусть задана функция $f : D \to X \subset \mathbb{R}$, при этом $D$ не ограничена сверху (снизу, сверху и снизу). Число $b$ называется **пределом функции $f$ на $+\infty$ $(-\infty, \ \infty)$**, если

$$\begin{aligned}
&\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad x > \Delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon \\
\big(&\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad x < -\Delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon, \\
&\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad |x| > \Delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon\big).
\end{aligned}$$

Функция называется **бесконечно большой** при $x \to a$, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \overset{\text{def}}{\iff} \forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x)| > A.$$

Заменяя $|f(x)| > A$ на $f(x) > A$ и $f(x) < -A$ соответственно, получают знакоопределённые бесконечно большие пределы

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

Аналогично определяются бесконечно большие функции при $x \to \infty$, $x \to \pm\infty$.

Пусть задана функция $f : D \to X \subset \mathbb{R}$ и $a$ — предельная точка $D$. Число $b$ называется **правым (левым) пределом функции $f$ в точке** $a$, если

$$\begin{aligned}
&\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad 0 < x - a < \delta \to |f(x) - b| < \varepsilon \\
\big(&\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad 0 < a - x < \delta \to |f(x) - b| < \varepsilon\big),
\end{aligned}$$

и обозначается

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a+0) \quad \left(\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a-0)\right).$$

Правый и левый пределы называются **односторонними пределами**. Справедлив следующий критерий существования предела функции: *функция имеет предел тогда и только тогда, когда оба её односторонних предела существуют, и они равны.*

# Решение задач

## Задача средняя (1)

Сформулировать следующие утверждения в соответствии с определением предела по Коши (на языке $\varepsilon - \delta$ и на языке окрестностей) и по Гейне

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$,
2) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b$,
3) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b$,
4) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = b$,
5) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = b$,
6) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = b$,
7) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$,
8) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$,
9) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$,
10) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$,
11) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = -\infty$,
12) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = +\infty$,
13) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$,
14) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = -\infty$,
15) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = +\infty$,
16) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \infty$,
17) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = -\infty$,
18) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = +\infty$,
19) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \infty$,
20) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$,
21) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$,
22) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \infty$,
23) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$,
24) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

Для каждого из случаев привести пример.

## Подсказка

При рассмотрении определений односторонних пределов по Коши на языке окрестностей, сузьте область определения $D$ функции $f$ до множеств

$$D_{a-} = D \cap (-\infty, a), \quad D_{a+} = D \cap (a, +\infty).$$

В случае бесконечного возрастания аргумента и/или функции при формулировке определения на языке окрестностей воспользуйтесь окрестностями бесконечностей $U_\infty,\ U_{-\infty}, U_{+\infty}$.

**Решение:**

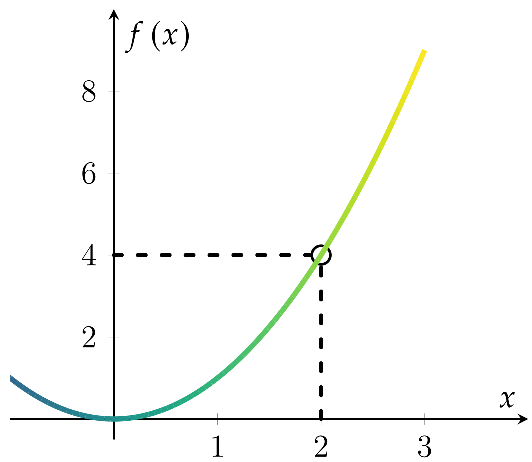
Для удобства введём обозначения

$$D_{a-} = D \cap (-\infty, a), \quad D_{a+} = D \cap (a, +\infty).$$

1. $f(x) \to b,\ x \to a$:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon-\delta:&\quad \forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad \forall x \in D: \quad 0<|x-a|<\delta \implies |f(x)-b|<\varepsilon,\\
U_a:&\quad \forall V_b \quad \exists U_a^\circ: \quad f(U_a^\circ \cap D) \subset V_b,\\
\text{Heine}:&\quad \forall \{x_n\} \subset D \setminus \{a\},\ x_n \to a\ (n\to\infty): \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n)=b,\\
\text{example}:&\quad \lim_{x\to 2} x^2 = 4;
\end{aligned}
$$

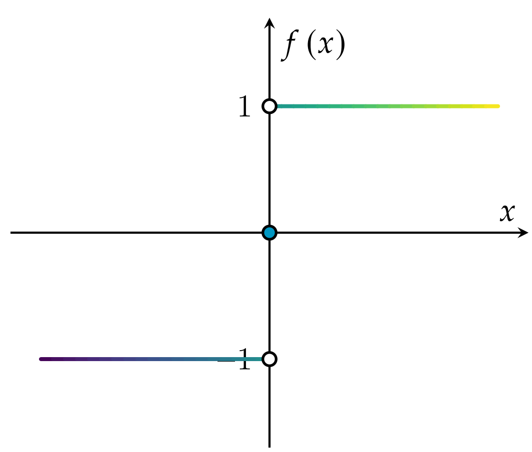
**Function $f(x) = x^2$ plot**




2. $f(x) \to b,\ x \to a-0$:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon-\delta:&\quad \forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad \forall x \in D: \quad 0<a-x<\delta \implies |f(x)-b|<\varepsilon,\\
U_a:&\quad \forall V_b \quad \exists U_a: \quad f(U_a \cap D_{a-}) \subset V_b,\\
\text{Heine}:&\quad \forall \{x_n\} \subset D_{a-},\ x_n \to a\ (n\to\infty): \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n)=b,\\
\text{example}:&\quad \lim_{x\to -0} \operatorname{sign} x = -1;
\end{aligned}
$$

**Function $f(x) = \textbf{sign } x$ plot**



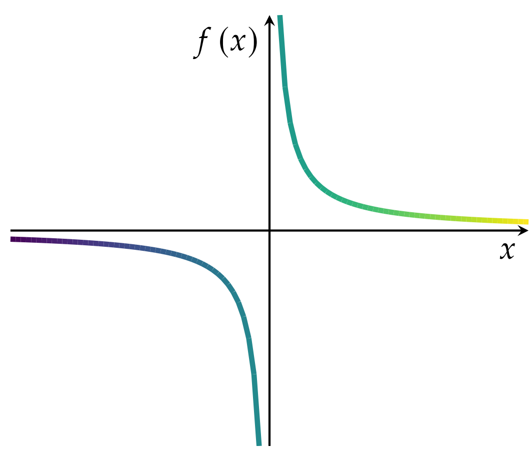
3. $f(x) \to b, \ x \to a+0$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon-\delta: &\quad \forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad \forall x \in D: \quad 0<x-a<\delta \implies |f(x)-b|<\varepsilon, \\
U_a: &\quad \forall V_b \quad \exists U_a: \quad f(U_a \cap D_{a+}) \subset V_b, \\
\text{Heine}: &\quad \forall \{x_n\} \subset D_{a+}, \ x_n \to a \ (n \to \infty): \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b, \\
\text{example}: &\quad \lim_{x\to+0} \operatorname{sign} x = 1;
\end{aligned}$$

4. $f(x) \to b, \ x \to \infty$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon-\delta: &\quad \forall \varepsilon>0 \quad \exists \Delta>0 \quad \forall x \in D: \quad |x|>\Delta \implies |f(x)-b|<\varepsilon, \\
U_a: &\quad \forall V_b \quad \exists U_\infty: \quad f(U_\infty \cap D) \subset V_b, \\
\text{Heine}: &\quad \forall \{x_n\} \subset D, \ x_n \to \infty \ (n \to \infty): \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b, \\
\text{example}: &\quad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0;
\end{aligned}$$

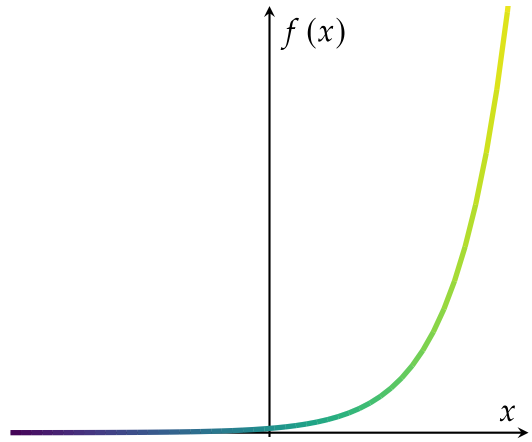
**Function $f(x) = \frac{1}{x}$ plot**




5. $f(x) \to b, \ x \to -\infty$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon-\delta: &\quad \forall \varepsilon>0 \quad \exists \Delta>0 \quad \forall x \in D: \quad x<-\Delta \implies |f(x)-b|<\varepsilon, \\
U_a: &\quad \forall V_b \quad \exists U_{-\infty}: \quad f(U_{-\infty} \cap D) \subset V_b, \\
\text{Heine}: &\quad \forall \{x_n\} \subset D, \ x_n \to -\infty \ (n \to \infty): \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b, \\
\text{example}: &\quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0;
\end{aligned}$$

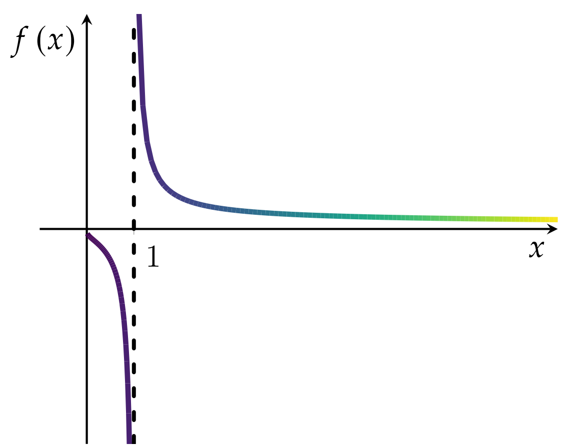
**Function $f(x) = e^x$ plot**




6. $f(x) \to b,\ x \to +\infty$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon - \delta: &\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad x > \Delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon, \\
U_a: &\quad \forall V_b \quad \exists U_{+\infty}: \quad f(U_{+\infty} \cap D) \subset V_b, \\
\text{Heine}: &\quad \forall \{x_n\} \subset D,\ x_n \to +\infty\ (n \to \infty): \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b, \\
\text{example}: &\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} = 0;
\end{aligned}$$

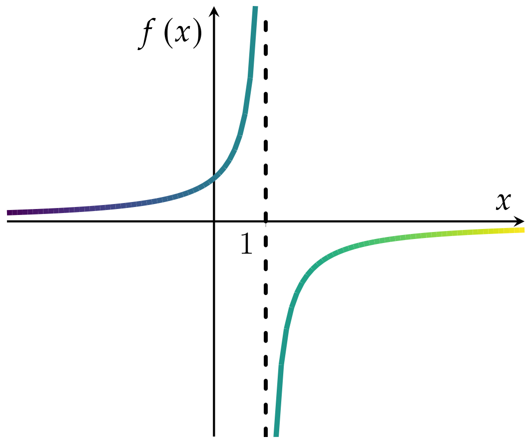
**Function $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ plot**




7. $f(x) \to \infty,\ x \to a$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon - \delta: &\quad \forall E > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x)| > E, \\
U_a: &\quad \forall V_\infty \quad \exists U_a^\circ: \quad f(U_a^\circ \cap D) \subset V_\infty, \\
\text{Heine}: &\quad \forall \{x_n\} \subset D \setminus \{a\},\ x_n \to a\ (n \to \infty): \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty, \\
\text{example}: &\quad \lim_{x\to1} \frac{1}{1-x} = \infty;
\end{aligned}$$

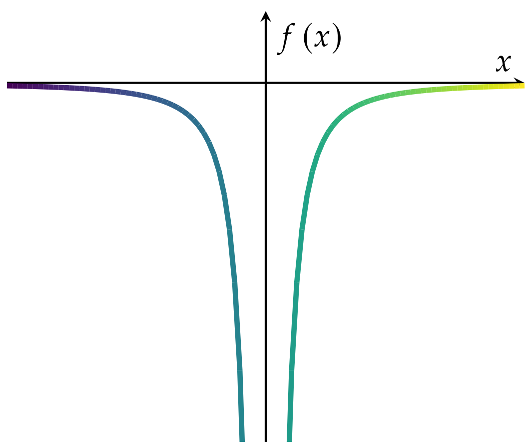
**Function $f(x) = \frac{1}{1-x}$ plot**




8. $f(x) \to -\infty,\ x \to a$:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon-\delta: &\quad \forall E > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad 0 < |x-a| < \delta \implies f(x) < -E,\\
U_a: &\quad \forall V_{-\infty} \quad \exists U_a^\circ: \quad f(U_a^\circ \cap D) \subset V_{-\infty},\\
\text{Heine}: &\quad \forall \{x_n\} \subset D \setminus \{a\},\ x_n \to a\ (n \to \infty): \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty,\\
\text{example}: &\quad \lim_{x\to 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty;
\end{aligned}
$$

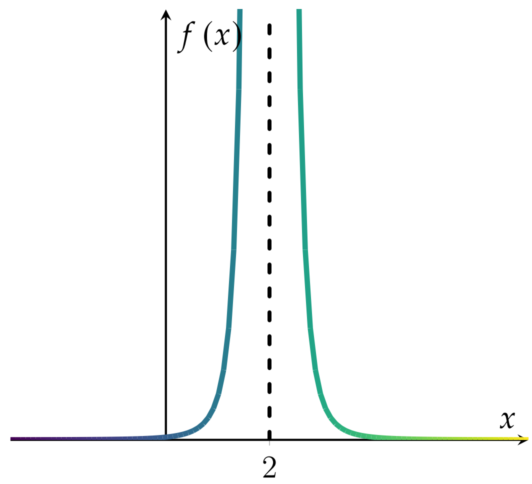
**Function $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ plot**




9. $f(x) \to +\infty,\ x \to a$:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon-\delta: &\quad \forall E > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad 0 < |x-a| < \delta \implies f(x) > E,\\
U_a: &\quad \forall V_{+\infty} \quad \exists U_a^\circ: \quad f(U_a^\circ \cap D) \subset V_{+\infty},\\
\text{Heine}: &\quad \forall \{x_n\} \subset D \setminus \{a\},\ x_n \to a\ (n \to \infty): \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty,\\
\text{example}: &\quad \lim_{x\to 2} \frac{1}{(x-2)^4} = +\infty;
\end{aligned}
$$

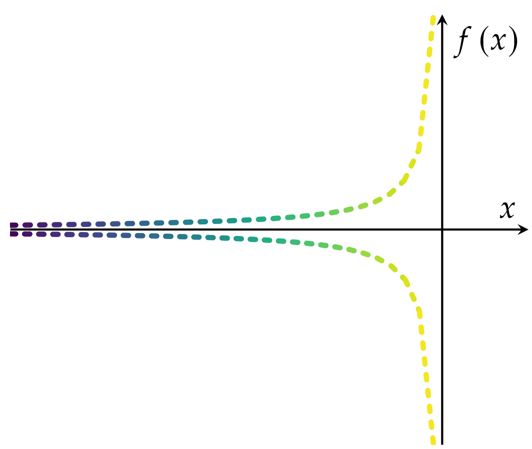
**Function $f(x) = \frac{1}{(x-2)^4}$ plot**




10. $f(x) \to \infty,\ x \to a-0$:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon-\delta: &\quad \forall E>0 \quad \exists \delta>0 \quad \forall x \in D: \quad 0<a-x<\delta \implies |f(x)|>E, \\
U_a: &\quad \forall V_\infty \quad \exists U_a: \quad f(U_a \cap D_{a-}) \subset V_\infty, \\
\text{Heine}: &\quad \forall \{x_n\} \subset D_{a-},\ x_n \to a\ (n \to \infty): \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty, \\
\text{example}: &\quad \lim_{x\to -0} \frac{1}{x} \cdot Q(x) = \infty, \quad Q(x) = \begin{cases} -1, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases};
\end{aligned}
$$

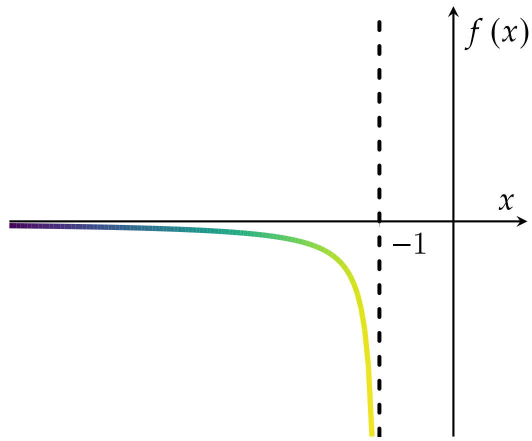
**Function $f(x) = \frac{1}{x} \cdot Q(x)$ plot**




11. $f(x) \to -\infty,\ x \to a-0$:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon-\delta: &\quad \forall E>0 \quad \exists \delta>0 \quad \forall x \in D: \quad 0<a-x<\delta \implies f(x)<-E, \\
U_a: &\quad \forall V_{-\infty} \quad \exists U_a: \quad f(U_a \cap D_{a-}) \subset V_{-\infty}, \\
\text{Heine}: &\quad \forall \{x_n\} \subset D_{a-},\ x_n \to a\ (n \to \infty): \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty, \\
\text{example}: &\quad \lim_{x\to -1-0} \frac{1}{x+1} = -\infty;
\end{aligned}
$$

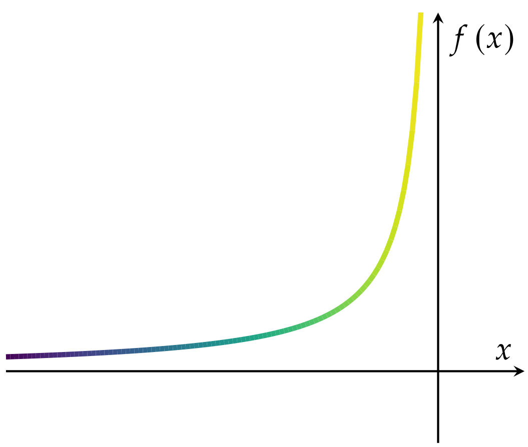
**Function $f(x) = \frac{1}{x+1}$ plot**




12. $f(x) \longrightarrow +\infty,\ x \longrightarrow a - 0$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon - \delta : &\quad \forall E > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D : \quad 0 < a - x < \delta \implies f(x) > E,\\
U_a : &\quad \forall V_{+\infty} \quad \exists U_a : \quad f(U_a \cap D_{a-}) \subset V_{+\infty},\\
\text{Heine} : &\quad \forall \{x_n\} \subset D_{a-},\ x_n \longrightarrow a \ (n \longrightarrow \infty) : \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty,\\
\text{example} : &\quad \lim_{x\to -0} -\frac{1}{x} = +\infty;
\end{aligned}$$

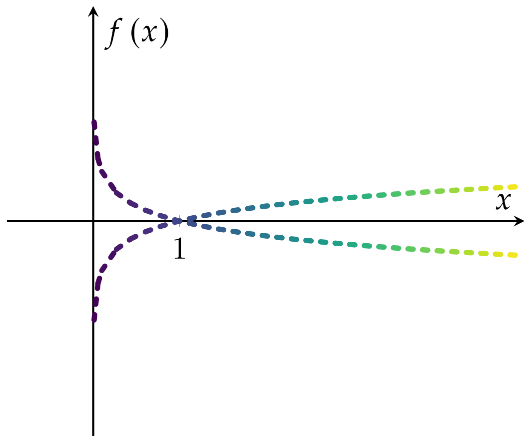
**Function $f(x) = -\frac{1}{x}$ plot**




13. $f(x) \longrightarrow \infty,\ x \longrightarrow a + 0$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon - \delta : &\quad \forall E > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D : \quad 0 < x - a < \delta \implies |f(x)| > E,\\
U_a : &\quad \forall V_{\infty} \quad \exists U_a : \quad f(U_a \cap D_{a+}) \subset V_{\infty},\\
\text{Heine} : &\quad \forall \{x_n\} \subset D_{a+},\ x_n \longrightarrow a \ (n \longrightarrow \infty) : \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty,\\
\text{example} : &\quad \lim_{x\to +0} \ln(x) \cdot Q(x) = \infty, \quad Q(x) = \begin{cases} -1, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases};
\end{aligned}$$

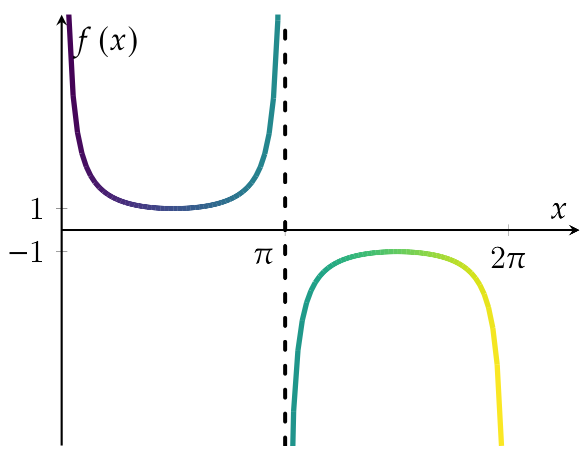
**Function $f(x) = \ln(x) \cdot Q(x)$ plot**




14. $f(x) \longrightarrow -\infty,\ x \longrightarrow a+0$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon - \delta: &\quad \forall E > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad 0 < x - a < \delta \implies f(x) < -E,\\
U_a: &\quad \forall V_{-\infty} \quad \exists U_a: \quad f(U_a \cap D_{a+}) \subset V_{-\infty},\\
\text{Heine}: &\quad \forall \{x_n\} \subset D_{a+},\ x_n \longrightarrow a \ \ (n \longrightarrow \infty): \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty,\\
\text{example}: &\quad \lim_{x\to\pi+0} \frac{1}{\sin x} = -\infty;
\end{aligned}$$

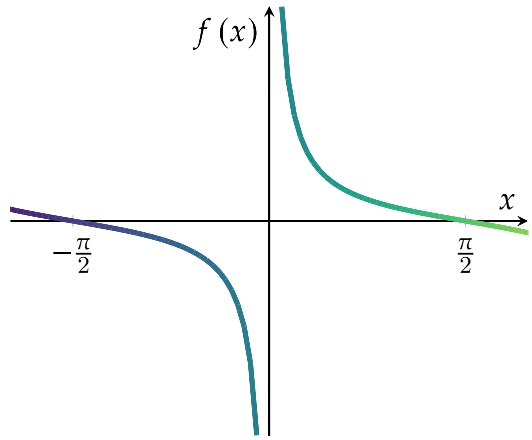
**Function $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ plot**




15. $f(x) \longrightarrow +\infty,\ x \longrightarrow a+0$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon - \delta: &\quad \forall E > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad 0 < x - a < \delta \implies f(x) > E,\\
U_a: &\quad \forall V_{+\infty} \quad \exists U_a: \quad f(U_a \cap D_{a+}) \subset V_{+\infty},\\
\text{Heine}: &\quad \forall \{x_n\} \subset D_{a+},\ x_n \longrightarrow a \ \ (n \longrightarrow \infty): \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty,\\
\text{example}: &\quad \lim_{x\to+0} \operatorname{ctg} x = +\infty;
\end{aligned}$$

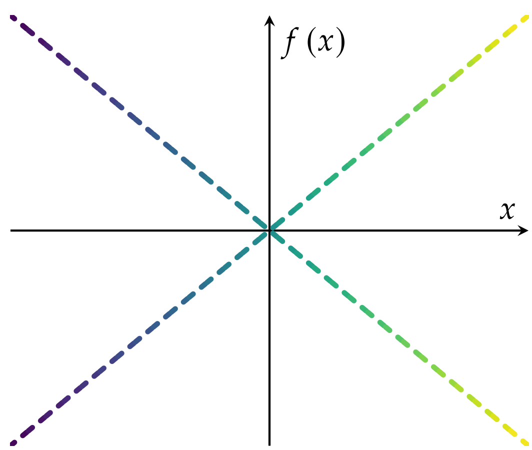
**Function $f(x) = \operatorname{ctg} x$ plot**




16. $f(x) \to \infty,\ x \to \infty$:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon - \delta: &\quad \forall E > 0 \quad \exists \Delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad |x| > \Delta \implies |f(x)| > E, \\
U_a: &\quad \forall V_\infty \quad \exists U_\infty: \quad f(U_\infty \cap D) \subset V_\infty, \\
\text{Heine}: &\quad \forall \{x_n\} \subset D,\ x_n \to \infty\ (n \to \infty): \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty, \\
\text{example}: &\quad \lim_{x\to\infty} x \cdot Q(x) = \infty, \quad Q(x) = \begin{cases} -1, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases};
\end{aligned}
$$

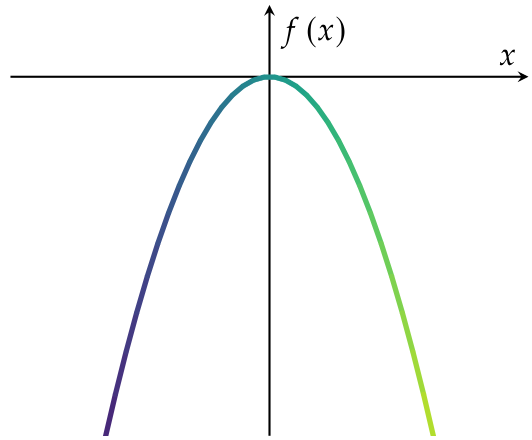
**Function $f(x) = x \cdot Q(x)$ plot**




17. $f(x) \to -\infty,\ x \to \infty$:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon - \delta: &\quad \forall E > 0 \quad \exists \Delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad |x| > \Delta \implies f(x) < -E, \\
U_a: &\quad \forall V_{-\infty} \quad \exists U_\infty: \quad f(U_\infty \cap D) \subset V_{-\infty}, \\
\text{Heine}: &\quad \forall \{x_n\} \subset D,\ x_n \to \infty\ (n \to \infty): \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty, \\
\text{example}: &\quad \lim_{x\to\infty} -x^2 = -\infty;
\end{aligned}
$$

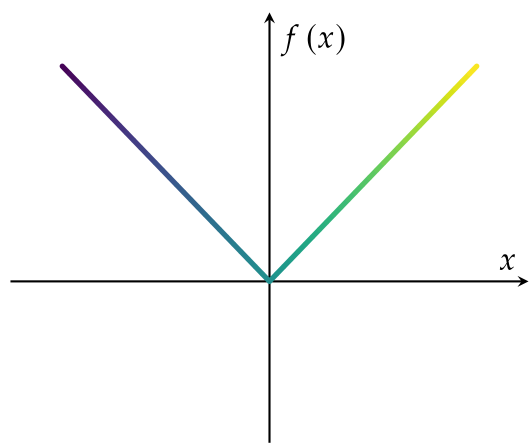
**Function $f(x) = -x^2$ plot**




18. $f(x) \to +\infty,\ x \to \infty$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon-\delta: &\quad \forall E>0 \quad \exists \Delta>0 \quad \forall x \in D: \quad |x|>\Delta \implies f(x)>E,\\
U_a: &\quad \forall V_{+\infty} \quad \exists U_{\infty}: \quad f(U_{\infty} \cap D) \subset V_{+\infty},\\
\text{Heine}: &\quad \forall \{x_n\} \subset D,\ x_n \to \infty\ (n \to \infty): \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty,\\
\text{example}: &\quad \lim_{x\to\infty} |x| = +\infty;
\end{aligned}$$

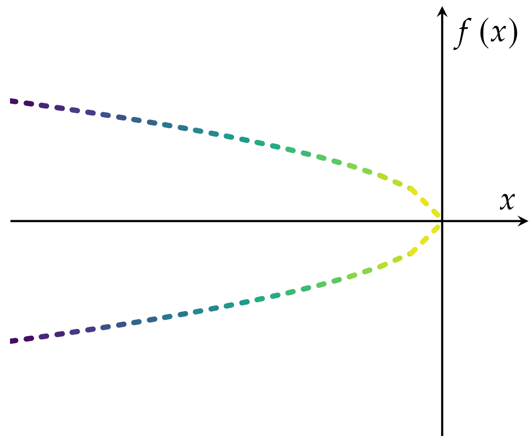
**Function $f(x) = |x|$ plot**




19. $f(x) \to \infty,\ x \to -\infty$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon-\delta: &\quad \forall E>0 \quad \exists \Delta>0 \quad \forall x \in D: \quad x<-\Delta \implies |f(x)|>E,\\
U_a: &\quad \forall V_{\infty} \quad \exists U_{-\infty}: \quad f(U_{-\infty} \cap D) \subset V_{\infty},\\
\text{Heine}: &\quad \forall \{x_n\} \subset D,\ x_n \to -\infty\ (n \to \infty): \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty,\\
\text{example}: &\quad \lim_{x\to-\infty} \sqrt{-x}\cdot Q(x) = \infty, \quad Q(x) = \begin{cases} -1, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases};
\end{aligned}$$

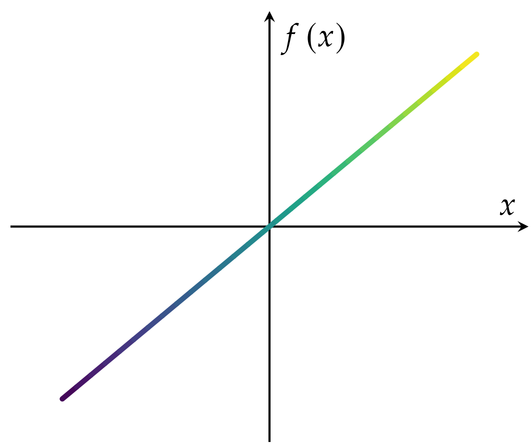
**Function $f(x) = \sqrt{-x} \cdot Q(x)$ plot**




20. $f(x) \longrightarrow -\infty,\ x \longrightarrow -\infty$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon - \delta: &\quad \forall E > 0 \quad \exists \Delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad x < -\Delta \implies f(x) < -E,\\
U_a: &\quad \forall V_{-\infty} \quad \exists U_{-\infty}: \quad f(U_{-\infty} \cap D) \subset V_{-\infty},\\
\text{Heine}: &\quad \forall \{x_n\} \subset D,\ x_n \longrightarrow -\infty\ (n \longrightarrow \infty): \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = -\infty,\\
\text{example}: &\quad \lim_{x \to -\infty} x = -\infty;
\end{aligned}$$

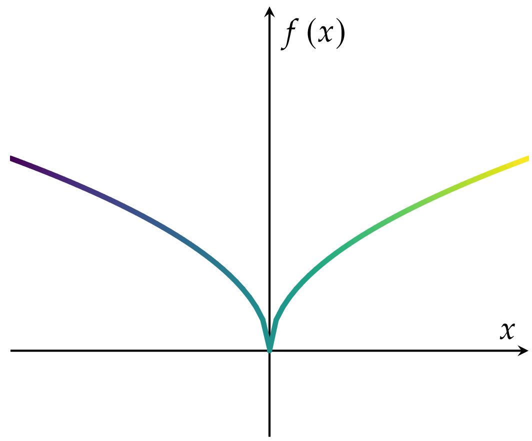
**Function $f(x) = x$ plot**




21. $f(x) \longrightarrow +\infty,\ x \longrightarrow -\infty$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon - \delta: &\quad \forall E > 0 \quad \exists \Delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad x < -\Delta \implies f(x) > E,\\
U_a: &\quad \forall V_{+\infty} \quad \exists U_{-\infty}: \quad f(U_{-\infty} \cap D) \subset V_{+\infty},\\
\text{Heine}: &\quad \forall \{x_n\} \subset D,\ x_n \longrightarrow -\infty\ (n \longrightarrow \infty): \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = +\infty,\\
\text{example}: &\quad \lim_{x \to -\infty} \sqrt{|x|} = +\infty;
\end{aligned}$$

**Function $f(x) = \sqrt{|x|}$ plot**



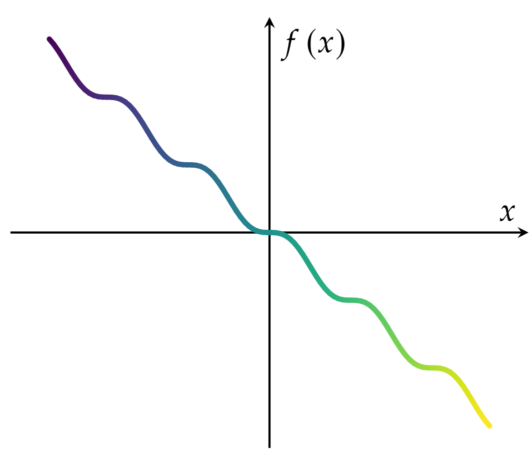

22. $f(x) \to \infty,\ x \to +\infty$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon - \delta : &\quad \forall E > 0 \quad \exists \Delta > 0 \quad \forall x \in D : \quad x > \Delta \implies |f(x)| > E, \\
U_a : &\quad \forall V_\infty \quad \exists U_{+\infty} : \quad f(U_{+\infty} \cap D) \subset V_\infty, \\
\text{Heine} : &\quad \forall \{x_n\} \subset D,\ x_n \to +\infty\ (n \to \infty) : \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty, \\
\text{example} : &\quad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) \cdot Q(x) = \infty, \quad Q(x) = \begin{cases} -1, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases};
\end{aligned}$$

23. $f(x) \to -\infty,\ x \to +\infty$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon - \delta : &\quad \forall E > 0 \quad \exists \Delta > 0 \quad \forall x \in D : \quad x > \Delta \implies f(x) < -E, \\
U_a : &\quad \forall V_{-\infty} \quad \exists U_{+\infty} : \quad f(U_{+\infty} \cap D) \subset V_{-\infty}, \\
\text{Heine} : &\quad \forall \{x_n\} \subset D,\ x_n \to +\infty\ (n \to \infty) : \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty, \\
\text{example} : &\quad \lim_{x\to+\infty} -x + \sin x = -\infty;
\end{aligned}$$

**Function $f(x) = -x + \sin x$ plot**



24. $f(x) \to +\infty,\ x \to +\infty$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon - \delta: &\quad \forall E > 0 \quad \exists \Delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad x > \Delta \implies f(x) > E,\\
U_a: &\quad \forall V_{+\infty} \quad \exists U_{+\infty}: \quad f(U_{+\infty} \cap D) \subset V_{+\infty},\\
\text{Heine}: &\quad \forall \{x_n\} \subset D,\ x_n \to +\infty\ (n \to \infty): \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty,\\
\text{example}: &\quad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty;
\end{aligned}$$

**Задача средняя (2)**

Исходя из определения предела функции, доказать, что

$$\lim_{x\to 3} x^2 = 9.$$

**Подсказка**

Рассмотрите модуль разности функции и её предельного значения. Пользуясь предположением $0 < |x-3| < \delta$ и свойствами модуля, оцените его сверху так, чтобы полученная оценка не зависела от $x$ (а только от $\delta$). Далее найдите диапазон возможных значений $\delta$ (этот диапазон зависит от $\varepsilon$) из условия, что полученная ранее оценка модуля разности меньше $\varepsilon$. Выбрав любое $\delta$ из найденного интервала, доказательство будет закончено.

**Решение:**

По определению Коши (на языке $\varepsilon-\delta$) существование предела $x^2 \to 9,\ x \to 3$ означает следующее

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x\in D: \quad 0<|x-3|<\delta \implies \left|x^2-9\right|<\varepsilon.$$

Рассмотрим модуль разности функции и её предела

$$\begin{aligned}\left|x^2-9\right| &= |x-3|\cdot|x+3| = \\ &= |x-3|\cdot|x-3+6| < \\ &< |x-3|\cdot(|x-3|+6) < \\ &< \delta\cdot(\delta+6) < \varepsilon.\end{aligned}$$

Решая неравенство $\delta^2+6\delta-\varepsilon<0$, получим, что для выполнения условия $\left|x^2-9\right|<\varepsilon$, достаточно взять

$$\frac{-6-\sqrt{6^2+4\varepsilon}}{2} < \delta < \frac{-6+\sqrt{6^2+4\varepsilon}}{2}.$$

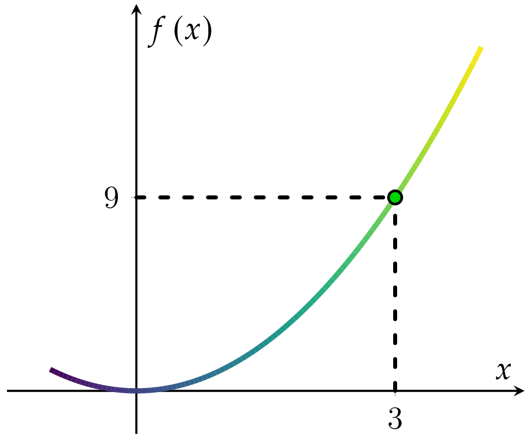
Найденный диапазон вместе с требованием $\delta>0$ даёт нам искомое

$$\delta=\sqrt{9+\varepsilon}-3,$$

хотя в качестве $\delta$ вообще можно выбрать любое число из интервала $\left(0, \sqrt{9+\varepsilon}-3\right)$.

Для наглядности построим график рассматриваемой функции.

**Limit $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$ visualization**



**Задача средняя (3)**

Исходя из определения предела функции, доказать, что

$$\lim_{x\to-3}\frac{x+3}{\sin x+2}=0.$$

**Подсказка**

Рассмотрите модуль разности функции и её предельного значения. Пользуясь предположением $0<|x+3|<\delta$, оцените его сверху так, чтобы полученное выражение не зависело от $x$ (а только от $\delta$). Из условия, что оценка модуля разности меньше $\varepsilon$, для всякого произвольного $\varepsilon>0$ определите соответствующее число $\delta$. На этом доказательство будет закончено.

**Решение:**

По определению Коши (на языке $\varepsilon-\delta$) существование предела $\frac{x+3}{\sin x+2}\to 0,\ x\to-3$ означает следующее

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\forall x\in D:\quad 0<|x+3|<\delta\implies\left|\frac{x+3}{\sin x+2}-0\right|<\varepsilon.$$

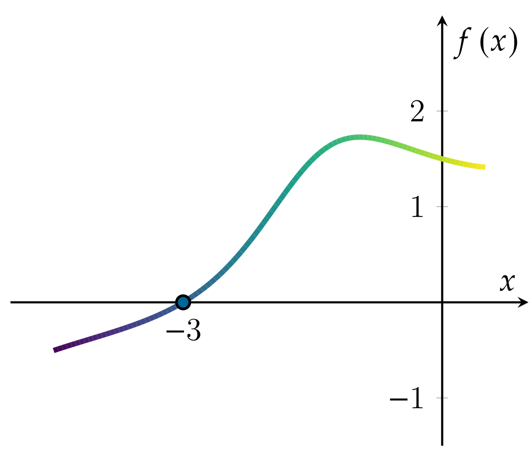
Рассмотрим модуль разности функции и её предела

$$\left|\frac{x+3}{\sin x+2}\right|<|x+3|<\delta<\varepsilon.$$

Отсюда следует, что в качестве $\delta$ можно взять $\delta(\varepsilon)=\varepsilon$.

Для наглядности построим график рассматриваемой функции.

**Limit** $\lim_{x\to-3}\frac{x+3}{\sin x+2}=0$ **visualization**



**Задача средняя (4)**

Исходя из определения предела функции, доказать, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{2x-5}=\frac{3}{2}.$$

**Подсказка**

Рассмотрите модуль разности функции и её предельного значения. Пользуясь предположением $|x|>\Delta$, оцените его сверху так, чтобы полученное выражение не зависело от $x$ (а только от $\Delta$). Из условия, что оценка модуля разности меньше $\varepsilon$, для всякого произвольного $\varepsilon>0$ определите соответствующее число $\Delta$. На этом доказательство будет закончено.

**Решение:**

По определению Коши (на языке $\varepsilon-\delta$) существование предела $\frac{3x+1}{2x-5}\to\frac{3}{2}$, $x\to\infty$ означает следующее

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\Delta>0\quad\forall x\in D:\quad |x|>\Delta\implies\left|\frac{3x+1}{2x-5}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon.$$

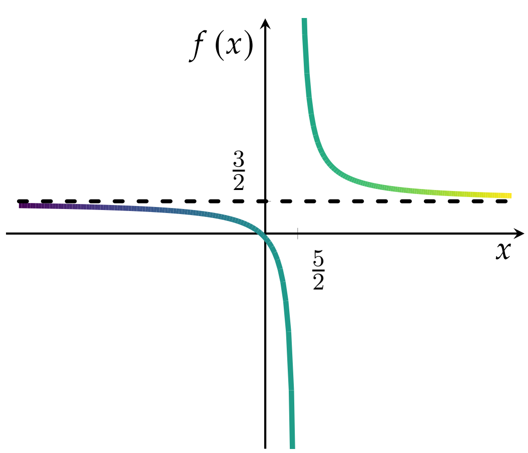
Рассмотрим модуль разности функции и её предела

$$\left|\frac{3x+1}{2x-5}-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{2\cdot(3x+1)-(2x-5)\cdot 3}{(2x-5)\cdot 2}\right|=$$
$$=\left|\frac{17}{(2x-5)\cdot 2}\right|\overset{D=\{x:\ |x|>5\}}{<}\frac{17}{2x}<$$
$$<\frac{17}{2\Delta}<\varepsilon.$$

Отсюда следует, что в качестве $\Delta$ можно взять $\Delta(\varepsilon)=\frac{17}{2\varepsilon}$.

Для наглядности построим график рассматриваемой функции.

**Limit** $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{2x-5}=\frac{3}{2}$ **visualization**



**Задача средняя (5)**

Исходя из определения предела функции, доказать, что

$$\lim_{x\to -1} \sqrt[3]{28+x} = 3.$$

**Подсказка**

Рассмотрите модуль разности функции и её предельного значения. Пользуясь предположением $|x+1| < \delta$, оцените его сверху так, чтобы полученное выражение не зависело от $x$ (а только от $\delta$). Из условия, что оценка модуля разности меньше $\varepsilon$, для всякого произвольного $\varepsilon > 0$ определите соответствующее число $\delta$. На этом доказательство будет закончено.

**Решение:**

По определению Коши (на языке $\varepsilon - \delta$) существование предела $\sqrt[3]{28+x} \to 3,\ x \to -1$ означает следующее

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad 0 < |x+1| < \delta \implies \left|\sqrt[3]{28+x} - 3\right| < \varepsilon.$$

Рассмотрим модуль разности функции и её предела на множестве $D = (-28, +\infty)$, а затем домножим и разделим её на такой множитель, чтобы в числителе получилась разность кубов

$$\left|\sqrt[3]{28+x} - 3\right| = \left|\frac{\left((28+x)^{\frac{1}{3}} - 3\right)\cdot\left((28+x)^{\frac{2}{3}} + (28+x)^{\frac{1}{2}}\cdot 3 + 9\right)}{\left((28+x)^{\frac{2}{3}} + (28+x)^{\frac{1}{2}}\cdot 3 + 9\right)}\right| =$$

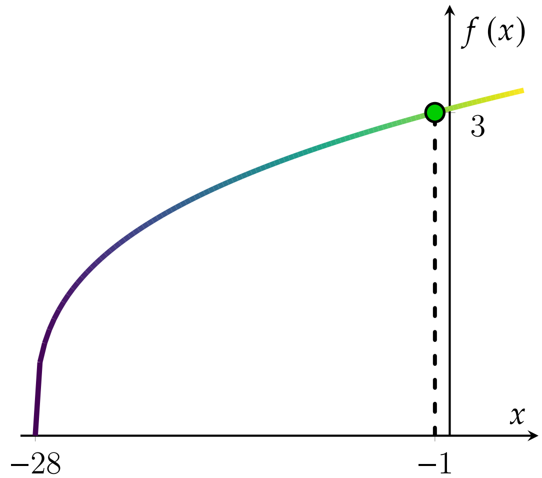
$$= \left|\frac{(28+x) - 27}{\left((28+x)^{\frac{2}{3}} + (28+x)^{\frac{1}{2}}\cdot 3 + 9\right)}\right| <$$

$$< \frac{|x+1|}{9} < \frac{\delta}{9} < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что в качестве $\delta$ можно взять $\delta(\varepsilon) = 9\varepsilon$.

Для наглядности построим график рассматриваемой функции.

**Limit** $\lim_{x\to -1}\sqrt{28+x}=3$ **visualization**



**Задача средняя (6)**

Исходя из определения предела функции, доказать, что

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty.$$

**Подсказка**

Пользуясь предположением $|x-1|<\delta$, оцените функцию $\frac{1}{(1-x)^2}$ снизу так, чтобы полученное выражение не зависело от $x$ (а только от $\delta$). Из условия, что значение функции больше $E$, для всякого произвольного $E>0$ определите соответствующее число $\delta$. На этом доказательство будет закончено.

**Решение:**

По определению Коши (на языке $\varepsilon-\delta$) существование предела $\frac{1}{(1-x)^2} \to +\infty$, $x\to 1$ означает следующее

$$\forall E>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x\in D: \quad 0<|x-1|<\delta \implies \frac{1}{(x-1)^2}>E.$$

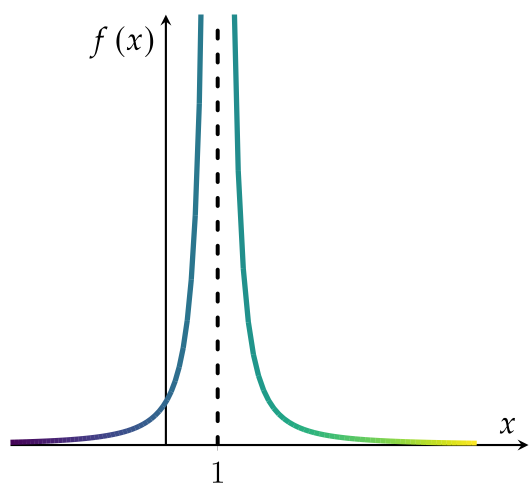
Рассмотрим функцию $\frac{1}{(1-x)^2}$ на всей числовой оси без единицы $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$$\frac{1}{(1-x)^2}>\frac{1}{\delta^2}>E.$$

Отсюда следует, что в качестве $\delta$ можно взять $\delta(E)=\frac{1}{\sqrt{E}}$.

Для наглядности построим график рассматриваемой функции.

**Limit** $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(1-x)^2}=+\infty$ **visualization**



## Задача средняя (7)

Исходя из определения предела функции, доказать, что

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \cos x = \frac{1}{2}.$$

### Подсказка

Рассмотрите модуль разности функции и её предельного значения. Используя тождество

$$\cos x - \cos\frac{\pi}{3} = -2\sin\left(\frac{x+\frac{\pi}{3}}{2}\right)\sin\left(\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2}\right),$$

неравенства $|\sin t| \le 1$ и $|\sin t| \le |t|$, а также предположение $\left|x-\frac{\pi}{3}\right| < \delta$, оцените модуль разности сверху так, чтобы полученное выражение не зависело от $x$ (а только от $\delta$). Из условия, что оценка модуля разности меньше $\varepsilon$, для всякого произвольного $\varepsilon > 0$ определите соответствующее число $\delta$. На этом доказательство будет закончено.

**Решение:**

По определению Коши (на языке $\varepsilon-\delta$) существование предела $\cos x \to \frac{1}{2}$, $x \to \frac{\pi}{3}$ означает, что

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}: \quad 0 < \left|x-\frac{\pi}{3}\right| < \delta \implies \left|\cos x - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon.$$

Далее нам потребуется тождество разности косинусов

$$\cos x - \cos\frac{\pi}{3} = -2\sin\left(\frac{x+\frac{\pi}{3}}{2}\right)\sin\left(\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2}\right).$$

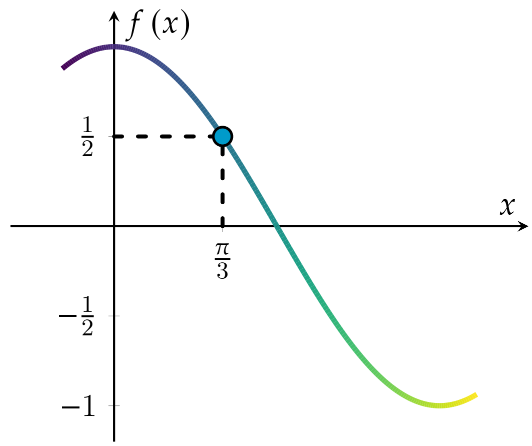
Рассмотрим модуль разности функции и её предела, используя оценки $|\sin x| \le 1$ и $|\sin t| \le |t| \quad \forall x, t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\left|\cos x - \frac{1}{2}\right| =& \left|\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\right| = \\
=& 2\cdot\underbrace{\left|\sin\left(\frac{x+\frac{\pi}{3}}{2}\right)\right|}_{<1}\cdot\underbrace{\left|\sin\left(\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2}\right)\right|}_{<\frac{\left|x-\frac{\pi}{3}\right|}{2}} < \\
<& \left|x-\frac{\pi}{3}\right| < \delta < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что в качестве $\delta$ можно взять $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$.

Для наглядности построим график функции $\cos x$ в окрестности точки $x = \frac{\pi}{3}$.

**Limit $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \cos x = \frac{1}{2}$ visualization**



**Задача простая (8)**

Выяснить существование предела
$$\lim_{x\to 5}\left[\frac{x}{5}\right].$$

**Подсказка**

Проверьте существуют ли и совпадают ли односторонние пределы, соответствующие пределу, данному в задаче.

**Решение:**

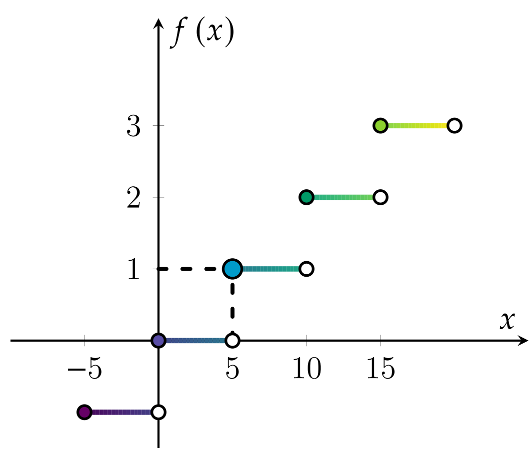
Вычислим односторонние пределы

$$\lim_{x\to 5-0}\left[\frac{x}{5}\right]=0,\quad \lim_{x\to 5+0}\left[\frac{x}{5}\right]=1.$$

Поскольку они не совпадают, предел не может существовать

$$\lim_{x\to 5-0}\left[\frac{x}{5}\right]\neq \lim_{x\to 5+0}\left[\frac{x}{5}\right]\implies \nexists \lim_{x\to 5}\left[\frac{x}{5}\right].$$

**Limit** $\lim_{x\to 5}\left[\frac{x}{5}\right]$ **visualization**



**Задача простая (9)**

Выяснить существование предела

$$\lim_{x\to-\infty} \cos 10x.$$

**Подсказка**

Рассмотрите две расходящиеся последовательности $a_n$ и $b_n$, неограниченно убывающие к $-\infty$, такие, что

$$\lim_{n\to\infty} \cos(10a_n) \neq \lim_{n\to\infty} \cos(10b_n).$$

На основании этого, пользуясь определением предела функции по Гейне, сделайте вывод о существовании предела.

**Решение:**

Рассмотрим две последовательности $x_n$ и $y_n$, неограниченно убывающие к $-\infty$,

$$x_n = -\pi\cdot n: \quad -\pi,\ -2\pi,\ -3\pi,\ \dots\ ,$$
$$y_n = -\pi\cdot n + \frac{\pi}{20}: \quad -\pi + \frac{\pi}{20},\ -2\pi + \frac{1}{20}\pi,\ -3\pi + \frac{1}{20}\pi,\ \dots\ .$$

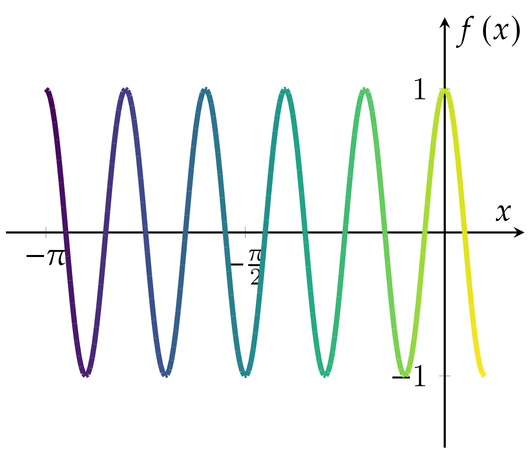
Для этих последовательностей справедливо

$$\lim_{n\to\infty} \cos(10x_n) = \lim_{n\to\infty} \cos(-10\pi n) = 1,$$
$$\lim_{n\to\infty} \cos(10y_n) = \lim_{n\to\infty} \cos\left(-10\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Из определния предела функции по Гейне отсюда следует несуществование рассматриваемого предела

$$\nexists \lim_{x\to-\infty} \cos(10x).$$

**Limit** $\lim_{x\to-\infty}\cos 10x$ **visualization**



**Задача средняя (10)**

Выяснить сходимость предела

$$\lim_{x\to b} \sin\frac{a}{x-b},\ a\neq 0.$$

**Подсказка**

Рассмотрите две последовательности $x_n$ и $y_n$, сходящиеся к $b$, такие, что

$$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{a}{x_n-b} \neq \lim_{n\to\infty} \sin\frac{a}{y_n-b}.$$

На основании этого, пользуясь определением предела функции по Гейне, сделайте вывод о существовании предела.

**Решение:**

Покажем, что выбрав соответствующие последовательности $x_n \to b$, $n\to\infty$ и $y_n \to b$, $n\to\infty$, можно добиться одновременно

$$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{a}{x_n-b} = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{a}{y_n-b} = 1.$$

Для этого достаточно выполнения условий

$$\frac{a}{x_n-b} = 2\pi n \implies x_n = \frac{a}{2\pi n} + b,$$

$$\frac{a}{y_n-b} = 2\pi n + \frac{\pi}{2} \implies y_n = \frac{a}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} + b.$$

Нетрудно убедиться, что полученные последовательности действительно сходятся к $b$

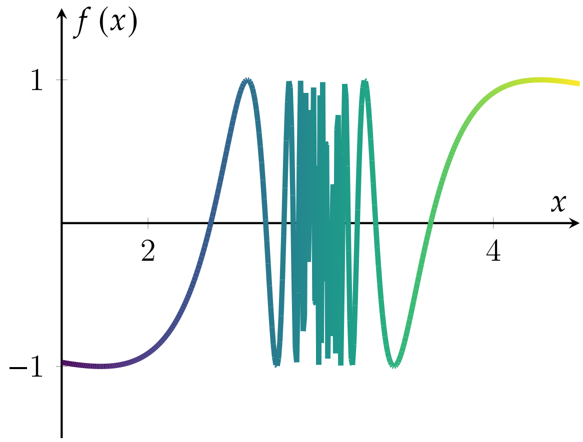
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{a}{2\pi n}}_{\to 0} + b = b,$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{a}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}}_{\to 0} + b = b.$$

Итак, в связи с определением предела по Гейне рассматриваемый предел не существует

$$\nexists \lim_{x\to b} \sin\frac{a}{x-b},\ a\neq 0.$$

**Limit** $\lim_{x \to 3} \sin \frac{2}{x-3}$ **visualization**



## Задача средняя (11)

Выясните существование предела

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}.$$

## Подсказка

Пользуясь определением предела по Коши, покажите, что данный предел равен нулю. При доказательстве воспользуйтесь очевидным неравенством

$$\left| \sin \frac{1}{x} \right| \le 1.$$

**Решение:**

Покажем, что рассматриваемый предел сходится к нулю.

По определению Коши (на языке $\varepsilon - \delta$) существование предела $x \sin \frac{1}{x} \to 0, \ x \to 0$ означает следующее

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D: \quad 0 < |x| < \delta \implies \left| x \sin \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Рассмотрим модуль разности функции и её предела

$$\left| x \sin \frac{1}{x} - 0 \right| < |x| \cdot \underbrace{\left| \sin \frac{1}{x} \right|}_{\le 1} < |x| < \delta < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что в качестве $\delta$ достаточно взять $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$. Итак, рассматриваемый предел существует и равен нулю.

*NB! Из определения следует, что существование предела не зависит от значения функции в предельной точке. Более того, функция (как в данном примере) может вообще не существовать в предельной точке, но при этом сам предел будет иметь вполне конкретное значение.*

**Limit** $\lim_{x\to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ **visualization**